K. Haberland
G. Horn

Ausgabe: Woche vom 12. 06. 2006
Abgabe: Woche vom 19. 06. 2006

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. (2+2+2+2 Punkte) Gegeben sei die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 17 & 3 & 11 & 5 & 4 & 2 & 19 & 12 & 9 & 15 & 7 & 1 & 10 & 18 & 20 & 14 & 8 & 16 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

(i) Stellen Sie σ dar als Produkt von Zyklen.

(ii) Stellen Sie σ dar als Produkt von Transpositionen.

(iii) Berechnen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

(iv) Berechnen Sie $\operatorname{ord}(\sigma)$, also die Ordnung von σ, das ist die kleinste natürliche Zahl $k \geq 1$, für die $\sigma^k = \mathrm{Id}$ gilt.

Aufgabe 2. (4 + 2 + 2 Punkte) Betrachtet sei der Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(e_1) = (1,1,0)^T$, $f(e_2) = (0,1,1)^T$, $f(e_3) = (1,0,1)^T$, worin e_1, e_2, e_3 die Standard-Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Weiter seien die Vektoren $v_1 = (-1,2,-3)^T$, $v_2 = (3,-2,1)^T$, $v_3(1,1,1)^T$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie die Matrix A_f von f bezüglich der Standard-Basis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ und berechnen Sie $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ sowie $\det(A_f)$.

(ii) Berechnen Sie das Volumen des Parallelotops $P(v_1, v_2, v_3)$ und das Volumen des Parallelotops $f(P) = P\big(f(v_1), f(v_2), f(v_3)\big)$.

(iii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Volumina von P und $f(P)$ sowie $\det(A_f)$?

Aufgabe 3. (4 Punkte) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass für diese Matrizen der Multiplikationssatz für Determinanten erfüllt ist:
$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$