K. Haberland
G. Horn

Ausgabe: Woche vom 05. 06. 2006
Abgabe: Woche vom 12. 06. 2006

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 7

Aufgabe 1. (3 Punkte) Eine Matrix $A \in M(n, n; \mathbb{R})$ heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $A^T = -A$ ist. Zeigen Sie, dass im Fall n ungerade für jede schiefsymmetrische Matrix A gilt: $\det(A) = 0$.

Aufgabe 2. (2 + 2 + 4 Punkte) Es sei $V = M(3, 3, \mathbb{R})$ die Menge aller reellen 3×3-Matrizen.

(i) Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und bestimmen Sie seine Dimension.

(ii) Nun sei U die Menge aller *magischen Quadrate*, d. h. aller Matrizen, in denen alle Zeilen-, Spalten- und die beiden Diagonalsummen den gleichen Wert haben. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von V ist.

(iii) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U. Geben Sie außerdem eine Basisdarstellung an für

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

S wie "Saturnsiegel" im Sprachgebrauch der Römer (schon bekannt in China um 2200 v. Chr.)

Aufgabe 3. (3 Punkte) Bestimmen Sie die Determinantenwerte $\det A$ und $\det B$ von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) Es sei $d \in \mathbb{R}$ fest. Bestimmen Sie alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, für die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 1 \\ a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 &= d \\ a^2\,x_1 + b^2\,x_2 + c^2\,x_3 &= d^2 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar ist; und geben Sie jeweils diese Lösung an.
(*Hinweis:* Regel von CRAMER und Determinate von Van der MONDE)