Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 5

Aufgabe 1. (4 Punkte) Es seien $V_\mathbb{R}$ und $V_\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen, betrachtet als Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Untersuchen Sie, ob die Abbildungen $f_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to V_\mathbb{R}$, $z \mapsto \bar{z}$ bzw. $f_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ linear sind.

Aufgabe 2. (2 + 3 + 3 Punkte) Es seien K ein Körper, V und W zwei K-Vektorräume, U ein Unterraum von V und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $\nu : V \to V/U$, $v \mapsto v + U$ ist linear.

(ii) Eine lineare Abbildung $g : V/U \to W$ mit $f = g \circ \nu$ existiert genau dann, wenn $U \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ gilt. In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt, d. h. ist $h : V/U \to W$ eine lineare Abbildung mit $f = h \circ \nu$, so gilt $g = h$.

(iii) $V/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f)$.

Aufgabe 3. (3 + 3 Punkte) Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

(i)
$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & + & 6x_2 & + & 20x_3 & = & -10 \\
x_1 & & & - & 2x_3 & = & 7 \\
3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 7 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & -1
\end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{rl}
3\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 + 4\,x_4 + x_5 &= 2 \\
x_1 - x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 + x_5 &= -1 \\
2\,x_1 - 3\,x_2 + 6\,x_3 + 9\,x_4 + 4\,x_5 &= -5 \\
7\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 + 8\,x_4 + x_5 &= 6
\end{array}$$

Aufgabe 4. (3 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der folgenden reellwertigen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -6 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$