K. Haberland
G. Horn

Ausgabe: Woche vom 15. 05. 2006
Abgabe: Woche vom 22. 05. 2006

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 4

Aufgabe 1. (2 Punkte) Gegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (1, 2, -3)\\
v_2 &= (4, -2, 2)\\
v_3 &= (2, -6, 8)\\
v_4 &= (1, -3, 4)\\
v_5 &= (3, 4, 5)
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie eine Teilmenge B von $\{v_1, \dots, v_5\}$ so, dass B eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2. (3 + 4 + 3 Punkte) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Ferner seien U_1 und U_2 Unterräume von V.

(i) Die Summe $U_1 + U_2$ von U_1 und U_2 ist definiert als

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2$ der kleinste Unterraum von V ist, der U_1 und U_2 enthält!

(ii) $U_1 + U_2$ heißt *direkte Summe von* U_1 *und* U_2, falls $U_1 \cap U_2 = 0$ gilt. Man schreibt dann auch $U_1 \oplus U_2$ statt $U_1 + U_2$. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ genau dann gilt, wenn sich jedes $v \in V$ auf eindeutige Weise als Summe $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ darstellen lässt.

(iii) Zeigen Sie: Ist $V = U_1 \oplus U_2$, so gilt $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.
(Hinweis: Zeigen Sie: Ist B_1 eine Basis von U_1 und B_2 eine Basis von U_2, so ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V.)

Aufgabe 3. (3 + 2 Punkte) Es sei $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist, und bestimmen Sie eine Basis von U.

(ii) Geben Sie einen Unterraum W von $\mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ an.

Aufgabe 4. (2 + 4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die durch $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 - x_3)$ definierte Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$.