Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebraische Topologie

Sommersemester 2006 | Übungsblatt 1

Eine Übungsbesprechung findet jede zweite Woche statt, im Anschluss an der Freitags-Vorlesung. Erstmals am 28. April. Leistungsnachweis-Interessierte sollten einen Tag vorher ihre Lösungen abgeben.

Aufgabe 1: (4 P.) Die reelle projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ entsteht, wenn man jeden Punkt P der 2-Sphäre S^2 mit dem gegenüberliegenden Punkt $-P$ identifiziert. Geben Sie eine plausible Begründung dafür, dass $\mathbb{RP}^2$ homöomorph ist zu einer Scheibe und einem Möbiusband, die Rand an Rand zusammengeklebt sind. Eventuell ist es hilfreich, S^2 in den drei Bereichen $|z| \leq \frac{1}{3}$, $z \geq \frac{1}{3}$ und $z \leq -\frac{1}{3}$ einzuteilen.

Die zweite Konstruktion von $\mathbb{RP}^2$ ist übrigens erst in $\mathbb{R}^4$ möglich.

Aufgabe 2: (4 P.) Zeigen Sie, dass die koendliche Topologie auf einer Menge X tatsächlich eine Topologie ist. Zeigen Sie ferner: ist X unendlich, so ist $U \cap V$ nicht leer für alle nichtleere offene Mengen U, V. Folgern Sie: es gibt keine Metrik auf $\mathbb{C}$, die die Zariski-Topologie induziert.

Aufgabe 3: (4 P.) Seien X, Y topologische Räume. Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $X \times Y$ die gröbste Topologie ist, dass die folgende Bedingung erfüllt: die Projektionsbbildungen $\pi_X \colon X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ und $\pi_Y \colon X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$ sind beide stetig.

„Gröbste“ heißt: ist $\mathscr{T}$ eine weitere Topologie auf $X \times Y$, die diese Bedingung erfüllt, so ist jede offene Menge der Produkttopologie auch offen bzgl. $\mathscr{T}$.

Zeigen Sie ferner: Sei Z ein weiterer topologischer Raum, und $f \colon Z \to X$, $g \colon Z \to Y$ zwei Abbildungen, die nicht unbedingt stetig sind. Dann ist die Abbildung $f \times g \colon Z \to X \times Y$, $z \mapsto (f(z), g(z))$ genau dann bezüglich der Produkttopologie auf $X \times Y$ stetig, wenn f, g beide stetig sind.

Aufgabe 4: (4 P.) Sei X ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X, mit der Unterraum-Topologie. Zeigen Sie:

a) Hat die Topologie auf X eine abzählbare Basis, so gilt das gleiche für Y.

b) Wird die Topologie auf X durch eine Metrik induziert, so wird die Topologie auf Y durch die Einschränkung dieser Metrik induziert.

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebraische Topologie

Sommersemester 2006 Übungsblatt 2

Dieses Übungsblatt wird nach der Vorlesung am 12.05.2006 besprochen. Abgabe ein Tag vorher.

Aufgabe 1: *(Die Vervollständigung eines metrischen Raumes)*
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Wie wird der Begriff „Cauchyfolge in X“ definiert?

Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X einen Grenzwert in X hat. In dieser Aufgabe werden wir sehen, wie man aus einen unvollständigen metrischen Raum einen vollständigen machen kann.

Sei F die Menge aller Cauchyfolgen in X. Sei $\sim$ die folgende Äquivalenzrelation auf F:

$$(x_n) \sim (y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = 0\,.$$

Auf die Äquivalenzklassenmenge $\bar{X} := F/\sim$ wird eine Metrik $\bar{d}$ wie folgt definiert:

$$\bar{d}([(x_n)]_\sim, [(y_n)]_\sim) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\,.$$

b) Tatsächlich gelten: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, $\bar{d}$ ist wohldefiniert, und $\bar{d}$ ist eine Metrik auf $\bar{X}$.

c) Der ursprüngliche metrische Raum (X, d) lässt sich mit einem Unterraum des neuen metrischen Raums $(\bar{X}, \bar{d})$ identifizieren, und zwar so, dass jeder Punkt in $\bar{X}$ der Grenzwert einer Cauchyfolge in X ist.

d) Jede Äquivalenzklasse in $\bar{X} = F/\sim$ hat einen Vertreter (x_n) mit der folgenden Eigenschaft: für alle n und für alle $m \geq n$ gilt $d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^n}$.

e) Jede Cauchyfolge $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ in $\bar{X}$ konvergiert in $\bar{X}$. Geben Sie aber auch Beispiele, die zeigen: ist $\bar{x}_n \in \bar{X}$ die Äquivalenzklasse der Cauchyfolge $x(n)_1, x(n)_2, \ldots$ in X, so muss die durch $y_n = x(n)_n$ definierte Folge in X nicht eine Cauchyfolge sein, und selbst wenn sie eine Cauchyfolge ist, so muss sie nicht den Grenzwert der Cauchyfolge $(\bar{x}_n)$ in $\bar{X}$ sein.

Aufgabe 2: Sei p eine Primzahl und d die p-adische Metrik auf $\mathbb{Z}$, d.h. $d(n, m) = \frac{1}{p^r}$ falls $m - n$ genau r-mal durch p teilbar ist. Und selbstverständlich $d(n, n) = 0$.

a) Weisen Sie nach, dass d tatsächlich eine Metrik ist.

b) Für jede Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in $\mathbb{Z}$ ist die durch $b_n = \sum_{r=0}^{n} a_r p^r$ definierte Folge (b_n) eine Cauchyfolge in $(\mathbb{Z}, d)$. Somit existiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ in der Vervollständigung $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, der Ring der p-adischen Zahlen.

c) Die Operationen $[(x_n)]_\sim + [(y_n)]_\sim = [(x_n + y_n)]_\sim$ und $[(x_n)]_\sim \cdot [(y_n)]_\sim = [(x_n y_n)]_\sim$ sind wohldefiniert und machen $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ zu einem Erweiterungsring von $\mathbb{Z}$.

d) Sei $a = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n p^n \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Dann $(p+1)a = 1$. Somit liegt a in $\widehat{\mathbb{Z}}_p \setminus \mathbb{Z}$.

e) Zeigen Sie allgemeiner: ist $\mathrm{ggT}(p, m) = 1$, dann $\frac{1}{m} \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$.

f) Es gibt eine Folge $a_0, a_1, \ldots$ in $\mathbb{Z}$ mit der folgenden Eigenschaft: $(\sum_{r=0}^{n} a_r 3^r)^2 - 7$ ist durch 3^{n+1} teilbar für alle $n \geq 0$. Somit existiert $\sqrt{7}$ in $\widehat{\mathbb{Z}}_3$. *Hinweis: Die Folge rekursiv konstruieren.*

g) Dagegen ist $\sqrt{2}$ nicht in $\widehat{\mathbb{Z}}_3$ enthalten.

Aufgabe 3: Ist X zusammenhängend und $f\colon X \to Y$ stetig, so ist auch das Bild $f(X)$ zusammenhängend.

Aufgabe 4: Sei X ein topologischer Raum. Sei $x \in X$.

a) Sind A, B zwei zusammenhängende Teilmengen von X, die beide x enthalten, so ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.

b) Das gleiche gilt für beliebige Vereinigungen von zusammenhängenden Mengen, die x enthalten.

c) Es eine größte zusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält – die sogenannte Zusammenhangskomponente von x. Besteht jede Zusammenhangskomponente aus nur einem Punkt, so heißt X total unzusammenhängend.

d) Diskrete Räume sind total unzusammenhängend.

Das unendliche Produkt $2^{\mathbb{N}}$ ist nicht diskret, dafür aber sowohl kompakt Hausdorff als auch total unzusammenhängend. Aber dieses Übungszettel ist bereits lang genug.

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebraische Topologie

Sommersemester 2006 Übungsblatt 3

Dieses Übungsblatt wird nach der Vorlesung am 26.05.2006 besprochen. Abgabe zwei Tage vorher. (Feiertag!)

Aufgabe 1: Sei X ein wegzusammenhängender Raum mit abelscher Fundamentalgruppe $\pi_1(X; x_0)$ für einen Punkt $x_0 \in X$. Zeigen Sie: ist $x_1 \in X$ und sind δ, δ' zwei Wege in X von x_0 nach x_1, so sind die beiden Isomorphismen $\delta_\#, \delta'_\# \colon \pi_1(X; x_1) \to \pi_1(X; x_0)$ gleich. Folgern Sie: für einen solchen Raum X darf man von der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ reden, *ohne* Angabe eines Basispunktes.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: S^2 mit einem Punkt entfernt ist erstens zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph und zweitens zusammenziehbar. Die Vereinigung $X = A \cup B \subseteq \mathbb{R}^2$ des Kreises $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und der Gerade $B = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\}$ ist zu A homotopie-äquivalent. Die Vereinigung eines Kreises und eines seiner Durchmesser ist zu einer Acht homotopie-äquivalent.

Aufgabe 3: Sei $\sim$ die folgende Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad x' - x \text{ und } y' - y \text{ liegen beide in } \mathbb{Z}.$$

Finden Sie eine Parametrisierung des Torus T, woran man erkennen kann, dass der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\sim$ zum Torus homöomorph ist. Zeigen Sie dann, dass $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ die Fundamentalgruppe des Torus ist.

Aufgabe 4: Sei X eine Acht, d.h. $X \subseteq \mathbb{R}^2$ besteht aus zwei Kreisen, die einander in einem Punkt $=: x_0$ treffen. Sei a bzw. b die folgende Schleife in X: einmal um den einen bzw. um den anderen Kreis, mit Basispunkt x_0. Ein Bild finden Sie auf Seite 57 von Hatcher (`www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATch1.pdf`). Lesen Sie dann die Konstruktion des Raums $\tilde{X}$ ("simply connected covering space") auf Seite 59 oben. Sei A bzw. $B \colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ die Abbildung, die jede Ecke um eins nach rechts bzw. nach oben verschiebt, und auf den Kanten affin linear ist. Sei G die Gruppe von Permutationen von $\tilde{X}$, die durch A und B erzeugt wird.

Zeigen Sie: Die Operation von G auf $\tilde{X}$ mit Bahnenraum X erfüllt unsere Voraussetzung 2.8; $\tilde{X}$ ist einfach zusammenhängend; $\pi_1(X; x_0) \cong G$.

Aufgabe 5: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^m$ ein n-Simplex mit Eckpunkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Sei $\pi_i \colon S \to \mathbb{R}$ die Abbildung $\sum_{j=0}^n \lambda_j x_j \mapsto \lambda_i$, für $\sum_j \lambda_j = 1$. In der Vorlesung wurde die Stetigkeit von π_i mittels Lemma 1.7 (jede stetige Bijektion von X kompakt nach Y Hausdorff ist ein Homöomorphismus) nachgewiesen. Finden Sie einen anderen Beweis.

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebraische Topologie

Sommersemester 2006 Übungsblatt 4

Dieses Übungsblatt wird nach der Vorlesung am 09.06.2006 besprochen. Abgabe ein Tag vorher.

Aufgabe 1: Die Dimension eines (endlichen) simplizialen Komplexes $X = |K|$ ist das größte n derart, dass K ein n-Simplex enthält. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass jeder n-dimensionale simpliziale Komplex sich in $\mathbb{R}^{2n+1}$ einbetten lässt.

a) Weisen Sie die Formel für die sogenannte Vandermonde-Determinante nach:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)\,.$$

b) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei P_λ der Punkt $P_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: sind $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden, so sind die Punkte $P_{\lambda_0}, P_{\lambda_1}, \dots, P_{\lambda_n}$ affin unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

c) Jeder n-dimensionale abstrakte simpliziale Komplex hat eine Realisierung in $\mathbb{R}^{2n+1}$. Jeder n-dimensionale (geometrische) simpliziale Komplex ist zu einem in $\mathbb{R}^{2n+1}$ homöomorph, und zwar durch einen stückweis affin linearen Homöomorphismus.

Aufgabe 2: Realisieren Sie den Torus, die reelle projektive Ebene und die Kleinsche Flasche als Δ-Komplexe mit je zwei 2-Simplexe. Sehen Sie hierzu die Bilder auf Seite 102 in Hatcher (§2.1; `www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATdelta.pdf`). Der Fall des Torus wurde schon in der Vorlesung besprochen, allerdings nicht bis ins letzte Detail.

Aufgabe 3: Betrachten wir den Torus mit der obigen Struktur eines Δ-Komplexes. Stellen Sie den simplizialen Kettenkomplex auf, und berechnen Sie die Randabbildungen, die Zykel und Ränder, und die Homologiegruppen.

Aufgabe 4: Machen Sie das gleiche für die reelle projektive Ebene und für die Kleinsche Flasche.

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebraische Topologie

Sommersemester 2006 Übungsblatt 5

Dieses Übungsblatt wird am 23.06.2006 besprochen. Abgabe ein Tag vorher.

Aufgabe 1: Beschreiben Sie alle Δ-Komplex-Strukturen auf der Kreislinie S^1. Zeigen Sie, dass jede solche Struktur zu den gleichen simplizialen Homologiegruppen führt.

Aufgabe 2: Triangulieren wir für $n \geq 1$ den n-Ball D^n als der simpliziale Komplex eines n-Simplexes σ, und die $(n-1)$-Sphäre S^{n-1} als sein Rand $\partial\sigma$ [vgl. Lemma 3.3 Teil 3)]. Setzen wir als bekannt voraus, was in der nächsten Aufgabe gezeigt wird: dass D^n die gleichen simplizialen Homologiegruppen ein Punkt hat: $H_0(D^n) \cong \mathbb{Z}$, $H_r(D^n) = 0$ sonst.

Berechnen Sie hieraus die simpliziale Homologie des S^{n-1}, indem Sie die beiden Kettenkomplexe miteinander vergleichen.

Aufgabe 3: Sei X ein simplizialer Komplex, der in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^m$ enthalten ist. Sei $b \in \mathbb{R}^m$ ein Punkt, der nicht auf dieser Hyperebene liegt. Der Kegel CX auf X mit Kegelpunkt b ist per Definition die Vereinigung aller Geradenstücke von b nach einem Punkt in X:

$$CX = \{tx + (1-t)b \mid x \in X,\, t \in [0,1]\}\,.$$

a) Ist $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ ein n-Simplex in X, so ist $b\sigma := (b, a_0, \ldots, a_n)$ ein $(n+1)$-Simplex in CX.

b) Seien σ, τ zwei Simplizes in X. Beschreiben Sie die Schnittmenge $b\sigma \cap b\tau$.

c) Geben Sie CX die Stuktur eines simplizialen Komplexes.

d) Ist $c = \sum_\sigma r_\sigma \sigma$ eine n-Kette in X, so setze $bc := \sum_\sigma r_\sigma b\sigma$, eine $(n+1)$-Kette in CX. Zeigen Sie: $d_{n+1}(bc) = c - bd_n(c)$ bzw. $d_1(bc) = c - b$.

e) Sei c eine n-Kette in CX. Für $n \geq 1$ zeigen Sie: es gibt eindeutig definierte Ketten $c' \in C_n^\Delta(X)$ und $c'' \in C_{n-1}^\Delta(X)$ mit $c = c' + bc''$. Formulieren Sie die entsprechende Aussage für $n = 0$.

f) Für $n \geq 1$ zeigen Sie: ist $c = c' + bc''$ ein n-Zykel, so ist $c = d_{n+1}(bc')$, ein Rand. Somit hat CX die gleichen Homologiegruppen wie ein Punkt.

g) Die n-Scheibe D^n hat die gleichen simplizialen Homologiegruppen wie ein Punkt, wenn man D^n als der simplizialer Komplex eines n-Simplexes trianguliert.

Aufgabe 4: Näht man eine Scheibe und ein Möbiusband Rand an Rand zusammen, so erhält man ja einen Raum, der zur projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ homöomorph ist. Finden Sie eine Δ-Komplex-Struktur auf $\mathbb{RP}^2$, die dieser Zerlegung entspricht. Rechnen Sie nach, dass man die gleichen simplizialen Homologiegruppen wie auf Blatt 4 erhält.

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebraische Topologie

Sommersemester 2006 Übungsblatt 6

In der Woche von Mo 3.7. bis Fr 7.7. finden keine Topologie-Vorlesungen statt. Ersatztermine wurden in der Vorlesung am 27.06. besprochen.

Dieses Übungsblatt wird am 14.07.2006 besprochen. Abgabe ein Tag vorher.

Aufgabe 1: Sei x ein Punkt des Raums X. In welchem Verhältnis zueinander stehen die reduzierten Homologiegruppen $\tilde{H}_n(X)$ und die relativen Homologiegruppen $H_n(X, x)$?

Aufgabe 2: Wir hatten $\mathbb{R}$ die Struktur eines Δ-Komplexes gegeben, so dass $\mathbb{Z}$ die Menge der 0-Simplizes war. Geben Sie ein elementares Argument dafür, dass $H_1^\Delta(\mathbb{R}) = 0$ gilt.

Aufgabe 3: Wieviele Simplizes welcher Dimension hat $(\Delta_3)'$ bzw. $(\Delta_2)''$?

Aufgabe 4: Sei $K = \{\sigma_\alpha \colon \Delta_{n(\alpha)} \to X \mid \alpha \in A\}$ eine Δ-Komplex-Struktur auf X. Beschreiben Sie, wie man mittels der baryzentrische Unterteilung des Standard-n-Simplexes Δ_n eine baryzentrische Unterteilung K' der Δ-Komplex-Struktur auf X definieren kann.

Zeigen Sie, dass jedes Simplex $\sigma \colon \Delta_n \to X$ in K' injektiv auf die Eckenmenge E von Δ_n ist. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass $\sigma(E) = \tau(E)$ gelten kann, ohne dass $\sigma = \tau$ gelten muss.

Zeigen Sie dagegen, dass die zweifache Unterteilung K'' eines endlichen Δ-Komplexes ein simplizialer Komplex ist (besser: zu einem simplizialen Komplex homöomorph ist).

Aufgabe 5: Sei X ein Δ-Komplex. Wann sollte eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ein Unterkomplex heißen? Definieren Sie die relativen simplizialen Homologiegruppen des Paars (X, Y) für Y ein Unterkomplex. Zeigen Sie, dass es eine entsprechende lange exakte Folge von simplizialen Homologiegruppen gibt.