Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 Lösungen zu Übungsblatt 13

Aufgabe 1: (4 P.)
Sei V bzw. W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$. Ein Weg, um die Basisvektoren $v_i \otimes w_j$ des Tensorprodukts anzuordnen, ist die lexikographische Ordnung. Nach diese Ordnung kommt $v_i \otimes w_j$ vor $v_a \otimes w_b$ falls $i < a$, oder $i = a$ und $j < b$. Berechnen Sie für diese Basisordnung die Matrizen $\rho((1\,2))$ und $\rho((1\,3))$ der Darstellung $\rho\colon S_3 \to GL_6(\mathbb{C})$, die durch $\rho = \rho_2 \otimes \rho_{\mathrm{nat}}$ erklärt wird.

Hier ist $\rho_2\colon S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ die Darstellung $(1\,2) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $(1\,3) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und ρ_{nat} ist die natürliche Permutationsdarstelllung $S_3 \to GL_3(\mathbb{C})$.

Lösung: Erstens stellen wir fest, dass die zwei Vektorräume, die in den Tensorprodukt vorkommen, von Dimensionen 2 und 3, jeweils, sind. Unsere Tensorprodukt hat daher den Basis $B = \{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_1 \otimes w_3, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2, v_3 \otimes w_3\}$, und die Matrizen der zwei Gruppenelemente können wir einfach so Berechnen, dass wir die tatsächliche Aktionen der Basiselemente beobachten:

$$\begin{aligned}
\rho_2(1 \quad 2)(v_1) &= v_2 \\
\rho_2(1 \quad 2)(v_2) &= v_1 \\
\rho_2(1 \quad 3)(v_1) &= -v_1 - v_2 \\
\rho_2(1 \quad 3)(v_2) &= v_2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\rho_n(1 \quad 2)(w_1) &= w_2 \\
\rho_n(1 \quad 2)(w_2) &= w_1 \\
\rho_n(1 \quad 2)(w_3) &= w_3 \\
\rho_n(1 \quad 3)(w_1) &= -w_3 \\
\rho_n(1 \quad 3)(w_2) &= -w_2 \\
\rho_n(1 \quad 3)(w_2) &= -w_1
\end{aligned}$$

und daher können wir die Auswirkungen auf den Tensorproduktbasis daraus folgen

$$\begin{aligned}
\rho(1\quad 2)(v_1 \otimes w_1) &= v_2 \otimes w_2 \\
\rho(1\quad 2)(v_1 \otimes w_2) &= v_2 \otimes w_1 \\
\rho(1\quad 2)(v_1 \otimes w_3) &= v_2 \otimes w_3 \\
\rho(1\quad 2)(v_2 \otimes w_1) &= v_1 \otimes w_2 \\
\rho(1\quad 2)(v_2 \otimes w_2) &= v_1 \otimes w_1 \\
\rho(1\quad 2)(v_2 \otimes w_3) &= v_1 \otimes w_3 \\
\rho(1\quad 3)(v_1 \otimes w_1) &= -v_1 \otimes w_3 - v_2 \otimes w_3 \\
\rho(1\quad 3)(v_1 \otimes w_2) &= -v_1 \otimes w_2 - v_2 \otimes w_2 \\
\rho(1\quad 3)(v_1 \otimes w_3) &= -v_1 \otimes w_1 - v_2 \otimes w_1 \\
\rho(1\quad 3)(v_2 \otimes w_1) &= v_2 \otimes w_3 \\
\rho(1\quad 3)(v_2 \otimes w_2) &= v_2 \otimes w_2 \\
\rho(1\quad 3)(v_2 \otimes w_3) &= v_2 \otimes w_1
\end{aligned}$$

und daher können wir es in Matrizen zusammenfassen:

$$\rho(1\quad 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(1\quad 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wir können dieses Ergebnis auch so erfassen, dass

$$\rho(1\quad 2) = \begin{pmatrix} 0 & \rho_n(1\quad 2) \\ \rho_n(1\quad 2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(1\quad 3) = \begin{pmatrix} -\rho_n(1\quad 3) & 0 \\ -\rho_n(1\quad 3) & \rho_n(1\quad 3) \end{pmatrix}$$

* * *

Aufgabe 2: (4 P.)
Für die symmetrische Gruppe S_3 berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle$ für alle Charaktere $\chi_1, \chi_2 \in \{\chi_{\text{triv}}, \chi_{\text{sign}}, \chi_{\text{nat}}\}$.

Erläuterungen: Benutzen Sie nur die Definition des Skalarprodukts, keine weiterführenden Ergebnisse – die Zentralisator-Form der Definition dürfen Sie aber schon benutzen. Hier ist χ_{triv} bzw. χ_{nat} der Charakter der trivialen Darstellung bzw. der natürlichen Permutationsdarstellung – wie üblich. Außerdem ist χ_{sign} der Charakter der eindimensionalen Darstellung $\rho(\sigma) = \text{Vorzeichen}(\sigma)$.

Lösung: Erstens stellen wir fest, dass $\chi_t(g) = 1$ für alle g, dass $\chi_s(a \quad b) = -1$, $\chi_s(e) = \chi_s(a \quad b \quad c) = 1$ und dass $\chi_n(e) = 3$, $\chi_n(a \quad b) = 1$ und $\chi_n(a \quad b \quad c) = 0$. Diese Werte stellen gleich fest, dass $\overline{\chi_*(g)} = \chi_*(g)$ für alle Charaktere wir betrachten. Damit können wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_t, \chi_t \rangle &= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_t(g)\overline{\chi_t(g)} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} 1 = 1 \\
\langle \chi_t, \chi_s \rangle &= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_t(g)\overline{\chi_s(g)} \\
&= \frac{1}{6} \sum \chi_s(g) \\
&= \frac{1}{6}(\chi_s(e) + 3\chi_s(1 \quad 2) + 2\chi_s(1 \quad 2 \quad 3)) \\
&= \frac{1}{6}(1 - 3 + 2) = 0 \\
\langle \chi_t, \chi_n \rangle &= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_t(g)\overline{\chi_n(g)} \\
&= \frac{1}{6} \sum \chi_n(g) \\
&= \frac{1}{6}(\chi_n(e) + 3\chi_n(1 \quad 2) + 2\chi_n(1 \quad 2 \quad 3)) \\
&= \frac{1}{6}(1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \chi_s, \chi_t \rangle &= \langle \chi_t, \chi_s \rangle = 0 \\
\langle \chi_s, \chi_s \rangle &= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_s(g)\overline{\chi_s(g)} \\
&= \frac{1}{6}(\chi_s(e)^2 + 3\chi_s(1 \quad 2)^2 + 2\chi_2(1 \quad 2 \quad 3)^2) \\
&= \frac{1}{6}(1 + 3 + 2) = 1 \\
\langle \chi_s, \chi_n \rangle &= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_s(g)\overline{\chi_n(g)} \\
&= \frac{1}{6}(\chi_s(e)\chi_n(e) + 3\chi_s(1 \quad 2)\chi_n(1 \quad 2) + 2\chi_s(1 \quad 2 \quad 3)\chi_n(1 \quad 2 \quad 3) \\
&= \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0) = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle \chi_n, \chi_t \rangle &= \langle \chi_t, \chi_n \rangle = 1 \\
\langle \chi_n, \chi_s \rangle &= \langle \chi_s, \chi_n \rangle = 0 \\
\langle \chi_n, \chi_n \rangle &= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_n(g)\overline{\chi_n(g)} \\
&= \frac{1}{6}(\chi_n(e)^2 + 3\chi_n(1 \quad 2)^2 + 2\chi_n(1 \quad 2 \quad 3)^2) \\
&= \frac{1}{6}(3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 2
\end{aligned}
$$

* * *

Aufgabe 3: (2 P.)
Finden Sie eine Klassenfunktion, der kein Charakter ist.

Lösung: Die Nullabbildung ist Konstant auf jede Konjugationsklasse, jedoch ist jede Charakter nichtnull auf die Einheit.

* * *

Aufgabe 4: (6 P.)
Berechnen Sie das Produkt ab in der Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$.

a) $G = C_2 = \langle x \rangle$ mit $x^2 = 1$; $a = 1 + x$, $b = 1 - x$.

Lösung:

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2 = 1 - 1 = 0$$

* * *

b) $G = S_3$, $a = 3\,\mathrm{Id} - (1\,2) + (1\,3\,2)$, $b = (2\,3) - (1\,3)$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&(3e - (1 \quad 2) + (1 \quad 3 \quad 2))((2 \quad 3) - (1 \quad 3) \\
&= 3e(2 \quad 3) - 3e(1 \quad 3) - (1 \quad 2)(2 \quad 3) + (1 \quad 2)(1 \quad 3) + (1 \quad 3 \quad 2)(2 \quad 3) - (1 \quad 3 \quad 2)(1 \quad 3) \\
&= 3(2 \quad 3) - 3(1 \quad 3) - (1 \quad 2 \quad 3) + (1 \quad 3 \quad 2) + (1 \quad 3) - (1 \quad 2) \\
&= -(1 \quad 2) - 2(1 \quad 3) + 3(2 \quad 3) - (1 \quad 2 \quad 3) + (1 \quad 3 \quad 2)
\end{aligned}
$$

* * *

c) $G = D_8 = \langle \delta, \sigma \rangle$ mit $\sigma^2 = \delta^4 = 1$ sowie $\sigma\delta\sigma = \delta^{-1}$; und $a = 1 + \sigma + \delta$, $b = \delta^2\sigma - \delta\sigma$.

Lösung: Nota dass $\sigma\delta^{-1}\sigma = \delta$, denn $\sigma^2 = 1$.

$$
\begin{aligned}
(1 + \sigma\delta)(\delta^2\sigma - \delta\sigma) &= \delta^2 - \delta\sigma + \sigma\delta^3\sigma - \sigma\delta^2\sigma \\
&= \delta^2 - \delta\sigma + \sigma\delta^{-1}\sigma - \sigma\delta\sigma^2\delta\sigma \\
&= \delta^2 - \delta\sigma + \delta - \delta^{-1}\delta^{-1} \\
&= 2\delta^2 - \delta\sigma + \delta
\end{aligned}
$$

* * *

Aufgabe 5: (4 P.)
Ein Element e eines Ringe R heißt idempotent, wenn $e^2 = e$ gilt. Finden Sie eine Idempotente e in der Gruppenalgebra $\mathbb{C}C_2$ derart, dass e weder 0 noch 1 ist.

Lösung: Ist $C_2 = \langle x \rangle$ mit $x^2 = 1$, dann ist $e = \frac{1}{2}(1+x)$ derart, dass $e^2 = \frac{1}{4}(1+x)(1+x) = \frac{1}{4}(1+x+x+1) = \frac{2}{4}(1+x) = e$.

* * *