Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 | Lösungen zu Übungsblatt 11

Abgabe: am Mi 05.07.2006 in der Vorlesung.

Durchgehend sei G eine endliche Gruppe. $\mathbb{C}G$-Moduln verstehen sich als endlich erzeugt. Denken Sie an den Satz von Maschke, und an die Beziehung $\chi_{M_1 \oplus M_2} = \chi_{M_1} + \chi_{M_2}$.

Aufgabe 1: Sei G die zyklische Gruppe der Ordnung 3. Zeigen Sie, dass die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ kein Integritätsbereich ist (3 P.).

Zeigen Sie ferner: für jede endliche Gruppe $G \neq 1$ gibt es Elemente $a, b \in \mathbb{C}G \setminus \{0\}$ mit $ab = ba = 0$.

Lösung: Seien in $\mathbb{C}C_3$ die Elemente aus der Gruppe $1, g, g^2$. Dann ist

$$0 = g^3 - 1 = (g-1)(g^2 + g + 1)$$

und daher ist $\mathbb{C}C_3$ kein Integritätsbereich.

Weiterhin, ist G eine endliche nicht-triviale Gruppe, dann für irgendein $g \in G$ mit Ordnung n ist $\langle g \rangle = \{1, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ eine zyklische Untergruppe. Dann ist auch $(g-1)(g^{n-1} + \cdots + g + 1) = (g^{n+1} + \cdots + g + 1)(g-1) = 0$.

* * *

Aufgabe 2: Sei M der vierdimensionale $\mathbb{C}S_4$-Modul, der die natürliche Permutationsdarstellung verwirklicht. Berechnen Sie den Charakterwert $\chi_M(\sigma)$ für jedes $\sigma \in S_4$, anhand des Zykel-Typs von σ (3 P.). Können Sie Ihr Ergebnis auf die natürliche Darstellung des S_n verallgemeinern?

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass M eine Kopie des trivialen $\mathbb{C}S_4$-Moduls enthält. Geben Sie das Argument für diesen konkreten Fall kurz wieder.

Folgern Sie, dass es ein $\mathbb{C}S_4$-Modul N gibt, dessen Charakter χ_N die folgenden Werte annimmt (3 P.):

	e	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_N	3	1	0	-1	-1

Lösung: Da M eine Permutationsdarstellung verwirklicht sind die Matrizen, die als Bilder von den σ auftauchen genau Permutationsmatrizen; und haben deshalb in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein nicht-null Eintrag, und dieser hat den Eintrag 1. So ein Eintrag liegt auf die Diagonale genau dann, wenn dieses Element unter der Permutation fest bleibt.

Hat also σ Zykeltyp (k_1, k_2, k_3, k_4), dann ist $\chi_M(\sigma) = k_1$. Allgemein gilt für eine Permutationsdarstellung M – mit genau diese Argumentation – dass $\chi_M(\sigma) = k_1$.

Für die Elemente aus S_4, sind es dann die folgende Werte:

σ	$\chi_M(\sigma)$
$(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3),$ $(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4),$ $(1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)$	0
$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2),$ $(1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$	1
$(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)$	2
	3
e	4

Die Vektor $e_1+e_2+e_3+e_4$ bleibt erhalten unter die Aktion der Gruppe auf M. Daher ist auch die gesamte Unterraum $\mathbb{C}(e_1+e_2+e_3+e_4)$ invariant unter dieser Aktion. Daher ist die triviale Modul als genau dieses Unterraum eingebettet.

Als Vektorräume ist dann $M = \mathbb{C}(e_1+e_2+e_3+e_4) \oplus N$. Aus der Beziehung der Charakter oben angeführt folgt die gegebene Werte der N.

* * *

Aufgabe 3: (4 P.) Wir haben zwei zweidimensionale Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_3 gesehen: einmal durch die Identifikation $S_3 = D_3$, und einmal als der Untermodul $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3=0\}$ der natürlichen Permutationsmoduls. Zeigen Sie, dass diese beiden Darstellungen äquivalent sind.

Lösung: Eine Äquivalenz ist eine Basiswechsel, so dass alle Generatormatrizen auf einander abgebildet werden; d.h. eine Matrix A so dass

$$A\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}A \tag{1}$$

$$A\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}A \tag{2}$$

Wenn wir $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ansetzen, erhalten wir hierdurch eine lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
-a-c &= -\frac{a}{2} - \frac{c\sqrt{3}}{2} & \qquad a &= c\\
-b-d &= -\frac{b}{2} - \frac{d\sqrt{3}}{2} & \qquad b &= d\\
a &= -\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} & \qquad a &= -c\\
b &= -\frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{d}{2} & \qquad b &= -d
\end{aligned}$$

und aus die letzten vier Gleichungen folgt $A = 0$.

* * *

Aufgabe 4: (3 P.) Sei G eine abelsche Gruppe und M ein $\mathbb{C}G$-Modul. Zeigen Sie, dass alle Elemente aus G einen gemeinsamen Eigenvektor in M haben. (Stichwort: Gleichzeitige Diagonalisierbarkeit). Folgern Sie, dass nur die eindimensionalen $\mathbb{C}G$-Moduln einfach sind.

Lösung: Sei M ein einfacher G-Modul. Jede kG-lineare Abbildung f ist eine lineare Abbildung $G \to G$, und hat deshalb ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Daher ist $f - \lambda E$ eine G-lineare Abbildung $G \to G$ mit nicht-trivialer Kern (denn sonst wäre λ kein Eigenwert). Da aber M einfach ist, muss dann der Kern ganz M sein, und daher ist $f = \lambda E$.

Nun, $g.(h.v) = (gh).v = (hg).v = h.g.v$ da G abelsch ist, und daher ist die Endomorphismus $v \mapsto g.v$ eine G-lineare Endomorphismus, und ist daher laut das obige eine $\lambda(g)E$.

Ist nun $N \subseteq M$ eine 1-dimensionale Unterraum. Dann bleibt N invariant unter jede $g \in G$, denn diese sind alle der Art $\lambda(g)E$. Da N invariant unter G ist, ist $N \neq 0$ ein Untermodul, und daher muss $M = N$.

* * *