Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 | Lösungen zu Übungsblatt 10

Sie dürfen voraussetzen, dass *jede* Körpererweiterung eine Transzendenzbasis hat.

Aufgabe 1: (3 P.) Beweisen Sie die Anmerkung aus der Algebra 1 (vgl. Vorlesung am 19.06.2006): Sind $k \subseteq L \subseteq K$ Körper, so ist K/k genau dann algebraisch, wenn K/L und L/k algebraisch sind.

Lösung: Ist K/k algebraisch, dann ist jede Transzendensbasis für K leer. Eine Transzendensbasis für L wäre in die für K enthalten durch die Austauschlemma. Also ist L/k algebraisch. Wäre K/L nicht algebraisch, dann gäbe es einen nicht-leeren Transzendensbasis von K über L. Dann, aber, sind die Elemente in dieser Transzendensbasis algebraisch unabhängig über L, und jedes Element in L algebraisch über k. Eine algebraische Abhängigkeit über k wurde zu eine Abhängigkeit über L übertragen. Daher ist ein Transzendensbasis über L eine Teilmenge einer Transzendensbasis über k, und daraus folgt das auch K/L algebraisch ist.

In die andere Richtung, angenommen dass K/L und L/k beide algebraisch sind. Ein Transzendensbasis für K/k ist eine Menge von algebraisch unabhängige Elemente über k. Da L/k algebraisch ist, sind diese Elemente auch algebraisch unabhängig über L. Jede Menge von algebraisch unabhängige Elemente in K/L, jedoch, muss leer sein, denn K/L ist algebraisch.

* * *

Aufgabe 2: (3 P.) Sei k der Körper $\mathbb{C}(X)$ der rationalen Funktionen. Zeigen Sie: Für jedes $n \geq 1$ stellt X^n eine Transzendenzbasis für $k/\mathbb{C}$ dar.

Lösung: Erstens ist X^n algebraisch unabhängig, denn wenn $f(X)X^n = 0$, dann ist $f(X) = 0$. Weiterhin kann jedes X^i für $i \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden, und zwar als $X^{i-n} \cdot X^n$. Also kann die gesamte Vektorraumbasis von k durch multipeln von X^n dargestellt werden, und daher sind alle Elemente in k Polynommultipeln von X^n.

* * *

Aufgabe 3: (3 P.) Sei B eine Transzendenzbasis der Erweiterung K/k. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $k(B)/k$ rein transzendent ist, d.h. kein $\alpha \in k(B) \setminus k$ ist algebraisch über k.

Lösung: Jedes $\alpha \in k(B) \setminus k$ ist auf den Form $\alpha = \sum_i \kappa_i b_i^{e_i}$ mit mindestens einer $e_i \neq 0$. Wäre α algebraisch, dann gäbe es ein Polynom $f(X) \in k(X)$ mit $f(\alpha) = 0$. Durch ausmultiplizieren von $f(\alpha)$ wird dann dieses ein Polynom $g(Y_1, \ldots, Y_r) \in k[Y_1, \ldots, Y_r]$ mit $g(b_1, \ldots, b_r) = 0$. Da, aber B eine Transzendensbasis ist, kann so ein Polynom nicht existieren, denn B ist algebraisch unabhängig.

* * *

Aufgabe 4: (3 P.) Zeigen Sie: ist K/k eine Körperweiterung, so gibt es einen Zwischenkörper $k \subseteq L \subseteq K$ derart, dass L/k algebraisch und K/L rein transzendent ist. Zeigen Sie außerdem: dieses L ist eindeutig definiert.

Lösung: Sind A die Menge aller algebraischen Elemente in K/k. Dann ist $k(A)/k$ algebraisch. Ist $K/k(A)$ rein transzendent, dann sind wir fertig. Das ist andererseits einigermaßen klar, denn wenn es ein algebraisches Element α in $K/k(A)$ gäbe, dann wäre α auch über k algebraisch, und deshalb wurde α schon in A liegen.

$k(A)$ ist die grösste mögliche algebraische Erweiterung von k, denn wenn L auch algebraisch über k ist, dann sind alle Elemente in L algebraisch über k, und daher ist $L \subseteq A$. Daher ist auch $L \subseteq k(A)$, und so ist jede algebraische Erweiterung von k in K eine Teilkörper von $k(A)$. Daraus folgt dass wenn L auch die erwartete Eigenschaften hat, dann ist $L \subseteq k(A)$. Da, aber K/L rein transzendent ist, muss jedes Element von K, das algebraisch ist über k in L enthalten sein. Das heißt aber das $L = k(A)$.

* * *

Aufgabe 5: Wie Aufgabe 4, aber diesmal sollte K/L algebraisch und L/k rein transzendent sein. Zeigen Sie: L existiert, muss aber nicht eindeutig sein (Beispiel!).

Lösung: Nehmen wir erst eine Transzendensbasis B für K/k. Dann ist $k(B)/k$ rein Transzendent laut Aufgabe 3. Da B eine Transzendensbasis für K war, ist $K/k(B)$ algebraisch, denn sonst wurde B grösser sein mussen.

In den folgenden Diagram sind die untere Körpererweiterungen beide transzendent, und die oberen beide algebraisch, jedoch sind sie verschieden.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2}, X, Y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}X, Y) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}(X, Y) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

* * *

Aufgabe 6: (4 P.) Berechnen Sie die Dimension jeder Komponente der algebraischen Menge $V(Y(Y^2 - X^3), YZ, Y(X-1)) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

Lösung: Als erstes brauchen wir $V(Y(Y^2 - X^3), YZ, Y(X-1))$ in Komponente aufteilen. Als Ideale gilt

$$(Y(Y^2 - X^3), YZ, Y(X-1)) = (Y) \cdot (Y^2 - X^3, Z, X-1)$$

und daher gilt

$$V(Y(Y^2 - X^3), YZ, Y(X-1)) = V(Y) \cup (V(Y^2 - X^3) \cap V(Z) \cap V(X-1))$$

Wir können die zweite Teil dieser Ausdruck weiter reduzieren dadurch, dass wir den Generator $Y^2 - X^3$ mit $X - 1$ reduzieren:

$$\begin{aligned} Y^2 - X^3 &= Y^2 - X^3 + (X-1)^3 \\ &= Y^2 - X^3 + X^3 - 3X^2 + 3X - 1 \\ &= Y^2 - 3X^2 + 3X - 1 + 3X(X-1) \\ &= Y^2 - 1 = (Y-1)(Y+1) \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} &V(Y) \cup [V(Y^2 - X^3) \cap V(Z) \cap V(X-1)] \\ =&V(Y) \cup [V(Y+1)(Y-1) \cap V(Z) \cap V(X-1)] \\ =&V(Y) \cup [V(Y+1) \cap V(Z) \cap V(X-1)] \cup [V(Y-1) \cap V(Z) \cap V(X-1)] \end{aligned}$$

Eine Komponente ist daher die Menge aller Punkte P mit $P_Y = 0$. Die zweite ist die Menge aller Punkte P so dass $P_Z = 0$, $P_X = 1$ und $P_Y = 1$ und die dritte ist die Menge aller Punkte P so dass $P_Z = 0$, $P_X = 1$ und $P_Y = -1$. Um die Dimensionen zu berechnen wollen wir die jeweiligen Ringe $\mathbb{C}[V(Y)]$, $\mathbb{C}[V(Y+1, Z, X-1)]$ und $\mathbb{C}[V(Y-1, Z, X-1)]$ behandeln.

Die erste Ring ist $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(Y) \cong \mathbb{C}[X,Z]$ mit Quotientenkörper $\mathbb{C}(X,Y)$ vom Transzendensgrad 2 mit Transzendensbasis $\{X, Z\}$ über $\mathbb{C}$. Daher ist die erste Komponente 2-Dimensional.

Die zweite Komponente hat Koordinatenring $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(Y+1, Z, X-1)$. Durch betrachten der Abbildung $\phi\colon \mathbb{C}[X,Y,Z] \to \mathbb{C}$ mit $X \mapsto 1$, $Y \mapsto -1$ und $Z \mapsto 1$ können wir erst feststellen, dass ϕ surjektiv ist, denn $\alpha X \mapsto \alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$. Weiterhin ist $\ker\phi = (X-1, Y+1, Z)$. Daher ist $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(X-1, Y+1, Z) \cong \mathbb{C}$, mit Quotientenkörper $\mathbb{C}$. Also hat der zweite Komponente Dimension 0.

Die dritte Komponente geht es ähnlich. Die Abbildung $\psi\colon \mathbb{C}[X,Y,Z] \to \mathbb{C}$ mit $X \mapsto 1$, $Y \mapsto 1$, $Z \mapsto 0$ hat Kern $(X-1, Y-1, Z)$ und daher gibt ψ eine Isomorphismus $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(X-1, Y-1, Z) \cong \mathbb{C}$. Daher ist auch die dritte Komponente von Dimension 0.

In Singular wäre es wie folgt auszurechnen:

```
> LIB "primdec.lib";    // Werkzeuge laden
// ( eine Aufzählung der Funktionsbibliotheke, die geladen wurden )
> ring R=0,(x,y,z),dp;          // die umgebende Ring
> ideal I=y*(y2-x3),yz,y*(x-1); // das definierende Ideal
> minAssGTZ(I);                 // die irreduziblen Komponente
[1]:
   _[1]=z
   _[2]=y+1
   _[3]=x-1
[2]:
   _[1]=z
   _[2]=y-1
   _[3]=x-1
[3]:
   _[1]=y
```

```
> dim(std(minAssGTZ(I)[1]));   // Für jede Komponente, eine Gröbnerbasis
0
> dim(std(minAssGTZ(I)[2]));   // ausrechnen und für diese die Dimension des
0
> dim(std(minAssGTZ(I)[3]));   // Ideals ausrechnen.
2
```

* * *