Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 Lösungen zu Übungsblatt 9

Aufgabe 1:

a) (3 P.) Zerlegen Sie $V(R_8, R_9)$ in seinen irreduziblen Komponenten. Ist C eine der algebraischen Mengen $V(R_8, R_9)$, $V(R_8, R_{10})$, $V(R_9, R_{10})$?

$V(R_8, R_9) = V(Y^2 - XZ, X^3 - YZ)$. Unsere erste Beobachtung ist das für $Y = 0$ und $X = 0$ sind beide Polynome, da jedes Term ein Faktor X oder Y enthält, gleich Null. Daher ist die Z-Achse eine Teilmenge von $V(R_8, R_9)$.

Da, nun, $C = V(R_8, R_9, R_{10}) = V(R_8, R_9) \cap V(R_10)$ muss auch $C \subsetneq V(R_8, R_9)$ eine irreduzible Komponente sein.

Nehmen wir nun einem Punkt P in $V(R_8, R_9)$. Ist $P_X = P_Y = 0$, dann sind wir auf der Z-Achse, laut der obigen Überlegungen. Ist $P_X = 0$, dann ist $P_Y^2 = 0$ und daher $P_Y = 0$, denn dann ist $Y^2 - 0 \cdot Z = Y^2 = 0$. Umgekehrt, ist $P_Y = 0$, dann ist $P_X^3 = 0$ und daher $P_X = 0$, denn dann ist $X^3 - 0 \cdot Z = X^3 = 0$. Also sind Punkte ausserhalb der Z-Achse solche, dass P_X und P_Y beide nicht-null sind. Auch dazu ist dann $P_Z \neq 0$, denn sonst wären $P_X = 0$ und $P_Y = 0$ aus gleiche Grunde wie oben.

Dann, aber, ist mit den Formeln von nächsten Teil, $XR_{10}(P) = 0$, und so ist auch $R_{10}(P) = 0$, denn $X \neq 0$. Also sind alle Punkte ausserhalb der X-Achse Punkte, die auf der Kurve C liegen.

b) (2 P.) Zeigen Sie, dass XR_{10} und YR_{10} im Ideal (R_8, R_9) liegen. Schreiben Sie die entsprechenden Formeln für XR_{10} und YR_{10} hin.

$$\begin{aligned} XR_{10} &= X(Z^2 - X^2Y) \\ &= XZ^2 - X^3Y + Y^2Z - Y^2Z \\ &= -Y(X^3 - YZ) - Z(Y^2 - XZ) \\ &= -ZR_8 - YR_9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} YR_{10} &= Y(Z^2 - X^2Y) \\ &= YZ^2 - X^2Y^2 + X^3Z - X^3Z \\ &= -Z(X^3 - YZ) - X^2(Y^2 - XZ) \\ &= -X^2R_8 - ZR_9 \end{aligned}$$

c) (2 P.) Sei $f = X^2R_9 + ZR_{10}$. Zeigen Sie, dass $R_9^2 - fX$ und $R_{10}^2 - fZ$ beide im Ideal (R_8) liegen. Folgern Sie, dass $V(f, R_8) = C$ gilt.

Mitgliedschaft in einem Ideal ist äquivalent mit Rest 0 bei Polynomdivision mit der Generatoren. Daher werden wir schlicht und einfach Polynomdivision mit R_8 durchführen. Nachdem die Ausdrücke einigermassen behandelt wurden, ist die tatsächliche Division einfach durchzuführen:

$$\begin{aligned} R_9^2 - fX &= (X^3 - YZ)^2 - X^3(X^3 - YZ) - XZ(Z^2 - X^2Y) \\ &= X^6 - 2X^3YZ + Y^2Z^2 - X^6 + X^3YZ - XZ^3 + X^3YZ \\ &= X^6 - X^6 + X^3YZ + X^3YZ - 2X^3YZ + Y^2Z^2 - XZ^3 \\ &= Y^2Z^2 - XZ^3 \\ &= Z^2(R_8) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{10}^2 - fZ &= (Z^2 - X^2Y)^2 - X^2Z(X^3 - YZ) - Z^2(Z^2 - X^2Y) \\
&= Z^4 - 2X^2YZ^2 + X^4Y^2 - X^5Z + X^2YZ^2 - Z^4 + X^2YZ^2 \\
&= X^4Y^2 - X^5Z + X^2YZ^2 + X^2YZ^2 - 2X^2YZ^2 + Z^4 - Z^4 \\
&= X^4Y^2 - X^5Z \\
&= X^4(R_8)
\end{aligned}
$$

Da, nun, Potenzen von R_9 und R_{10} in (f, R_8) liegen wird also $R_9, R_{10} \in \sqrt{(f, R_8)}$. Also ist $V(f, R_8) = V(\sqrt{(f, R_8)}) = V(f, R_8, R_9, R_{10}) = V(R_8, R_9, R_10)$. Also ist $V(f, R_8) = C$.

Aufgabe 2:

a) (2 P.) Sind $p, q \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, so ist

$$
(pq)_r = \sum_{s=0}^{r} p_s q_{r-s}.
$$

Für $r \in \{8, 9, 10\}$ gilt: ist $p = R_r$, dann $p = p_r$.

Ist p von t-Grad n_p und q von t-Grad n_q, so ist

$$
\begin{aligned}
pq &= (\sum_{i=0}^{n_p} p_i)(\sum_{j=0}^{n_q} q_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=0}^{n_q} p_i q_j \\
&= \sum_{k=0}^{n_p+n_q} \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}
\end{aligned}
$$

wo wir in das letzte Schritt Glieder nach ihren t-Grad gruppiert haben.

Daraus können wir schliessen, dass $(pq)_r = \sum_{i=0}^{r} p_i q_{r-i}$ ist. für $(R_r)_r$ können wir Beobachten, dass die t-Grade der Glieder sich als folgt verteilen:

$$
\begin{aligned}
Y^2 &: 2 * 4 = 8 \\
XZ &: 3 + 5 = 8 \\
X^3 &: 3 * 3 = 9 \\
YZ &: 4 + 5 = 9 \\
Z^2 &: 2 * 5 = 10 \\
X^2Y &: 2 * 3 + 4 = 10
\end{aligned}
$$

Daher ist jedes R_i Homogen vom t-Grad i.

b) (2 P.) Ist $r \in \{8, 9, 10\}$, $p \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ und $q \in (R_8, R_9, R_{10})$, so ist $(pq)_r = p_0 q_r$. Etwas genauer: ist $q = f^8 R_8 + f^9 R_9 + f^{10} R_{10}$ für Polynome $f^8, f^9, f^{10} \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, so ist $(pq)_r = p(0, 0, 0) f^r(0, 0, 0) R_r$ für $r = 8, 9, 10$.

Für ein solches q sind $q_1 = \cdots = q_7 = 0$, denn f^8, f^9, f^10 können den t-Grad einer homogener Teil nicht verniedrigen. Dann, aber, ist

$$(pq)_r = p_0 q_r + p_1 q_{r-1} + p_2 q_{r-2} + \sum_{i=3}^{r} p_i q_{r-i}$$

mit $r - i \leq 7$ im letzten Summe. Daher sind alle $q_{r_i} = 0$ im letzten Summe, und im vorderen Teil sind $p_1 = p_2 = 0$, denn 3 ist der niedrigste mögliche nichtnull t-Grad. also ist $p_0 q_r$ das einzige Glied, was noch übrig bleibt.

Um nun q_r etwas genauer zu betrachten, ist $q_r = (f^8 R_8 + f^9 R_9 + f^{10} R_{10})_r$. Von der Definition von der homogene Teile ist für Polynome f, g: $(f + g)_r = f_r + g_r$. Daher ist $q_r = (f^8 R_8)_r + (f^9 R_9)_r + (f^{10} R_{10})_r$. Für ein $(f^i R_i)_r$ gilt nun

$$(f^i R_i)_r = f^i_0 (R_i)_r + f^i_1 (R_i)_{r-1} + f^i_2 (R_i)_{r-2} + \ldots$$

wobei $(R_i)_{r-k} = 0$ für alle $k \geq 3$, da dann $r - k \neq i$ auf jedem Fall gewährleistet ist, und $f^i_1 = f^i_2 = 0$. Daher bleibt nur das Glied $f^i_0 (R_i)_r$; dieses wiederum ist null, sofern $i \neq r$ ist, und daher bleibt aus $(pq)_r$ nur $p_0 f^r_0 R_r$. Schliesslich ist dann für jedes Polynom g: $g_0 = g(0, 0, 0)$. QED.

c) (3 P.) Es gibt kein $g, h \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ mit $I(C) = (g, h)$.

Wir wissen schon, dass $I(C) = (R_8, R_9, R_{10})$. Daher liegt jedes geeignetes $g, h \in (R_8, R_9, R_{10})$. Also ist $g = g^8 R_8 + g^9 R_9 + g^{10} R_{10}$ und $h = h^8 R_8 + h^9 R_9 + h^{10} R_{10}$. Daher ist $g_i = g^i_0 R_i$ und $h_i = h^i_0 R_i$ für $i \in \{8, 9, 10\}$ und $g_i = h_i = 0$ für i in $1, 2, \ldots, 7$.

Wenn nun $I(C) = (g, h)$, dann können wir R_8, R_9 und R_{10} in g, h ausdrücken. Da $R_8 = \alpha^8 g + \beta^8 h$ muss es möglich sein g_8 und h_8 zu R_8 zu kombinieren. Wir können annehmen, dass $g_8 = R_8$ und $h_8 = 0$. Aus ähnlichen Grunde können wir annehmen, dass $g_9 = 0$, $h_9 = R_9$. Nun, ist $R_1 0 = \alpha g + \beta h$, dann muss erstens α und β jeweils kein Absolutglied enthalten, denn sonst wäre $(R_1 0)_8$ oder $(R_1 0)_9$ nicht null. Dann, aber, ist der kleinste zulässige Glied von α und β von t-Grad 3; und daher ist der kleinste mögliche Glied von $\alpha g + \beta h$ von t-Grad $8 + 3 = 11$. Daher ist $R_1 0$ nicht ausdrückbar in g, h. QED.

Aufgabe 3: (2 P.) Berechnen Sie dagegen das Radikal des Ideals $(X^2Y, XY^2) \in \mathbb{C}[X, Y]$. In diesem Fall hat $\sqrt{I}$ weniger Erzeuger als I, nicht mehr.

Jedes element in (X^2Y, XY^2) hat gemischten Grad. Daher teilt XY jedes element in (X^2Y, XY^2). Weiterhin liegt $XY \in \sqrt{(X^2Y, XY^2)}$, denn $(XY)^2 = X \cdot XY^2$. Ist, schliesslich, $f \in \sqrt{(X^2Y, XY^2)}$, dann ist $f^r = gX^2Y + hXY^2$. Daher ist $f^r = XY(gX + hY)$, was heisst dass f keine Terme haben kann, die nicht gemischt sind; denn hätte f solche Terme, dann wurde auch reine Terme in jedes f^r vorkommen, und daher könnte nicht $f^r = XY(gX + hY)$ sein. Also ist jedes $f \in \sqrt{(X^2Y, XY^2)}$ in (XY) enthalten.

Also ist $\sqrt{(X^2Y, XY^2)} = (XY)$.