Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 Lösungen zu Übungsblatt 8

Durchgehend sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine algebraische Menge der Art $V(f)$ heißt eine Hyperfläche. Eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^2(k)$ heißt eine Ebene Kurve.

Aufgabe 1:

a) (1 P.) *Wiederholung aus Algebra 1*
Sei R ein faktorieller Ring und $a \in R$ ein irreduzibles Element. Zeigen Sie: $(a) \lhd R$ ist ein Primideal.

Lösung: Prim ist äquivalent dazu, dass $R \setminus (a)$ multiplikativ geschlossen ist. Also nehmen wir $\alpha, \beta \in R \setminus (a)$. Wenn $\alpha\beta \in (a)$ wäre, dann wurde $a \mid \alpha\beta$. Dann, aber, entweder $a \mid \alpha$, oder $a \mid \beta$ oder $a = a_\alpha \cdot a_\beta$ mit $a_\alpha \mid \alpha$ und $a_\beta \mid \beta$. Die zwei erste Möglichkeiten sind unmöglich, denn $\alpha, \beta \notin (a)$. Die dritte möglichkeit, jedoch, wurde implizieren dass $a = a_\alpha a_\beta$ reduzibel ist.

* * *

b) (2 P.) Zeigen Sie: ist f irreduzibel, so ist $V(f)$ eine Varietät.

Lösung: Ist f irreduzibel, so ist $I(V(f)) = (f)$ prim, und daher $V(f)$ eine Varietät.

* * *

c) (2 P.) Für $g(X) \in k[X]$ ist $Y^2 - g(X) \in k[X, Y]$ genau dann reduzibel, wenn $g(X)$ ein Quadrat in $k[X]$ ist. Ist z.B. $g(X)$ vom Grad 3, so ist $Y^2 - g(X)$ irreduzibel.
Lösung: Ist $g(X)$ ein Quadrat so ist $Y^2 - g(X) = (Y + \sqrt{g(X)})(Y - \sqrt{g(X)})$.
Angenommen $Y^2 - g(X) = (Y - a(X))(Y - b(X))$. Dann ist $Y^2 - g(X) = Y^2 - a(X)Y - b(X)Y + a(X)b(X)$ und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} a(X) + b(X) &= 0 \\ a(X)b(X) &= -g(X) \end{aligned}$$

und aus dem ersten Gleichung folgt $a(X) = -b(X)$, so die zweite Gleichung wird $-a(X)^2 = -g(X)$ und daher $a(X)^2 = g(X)$. Die Existenz einer solchen a, jedoch, impliziert dass $g(X)$ ein Quadrat ist.

* * *

Aufgabe 2: Sei $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom. Per Definition heißt $V(f, \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})$ der singuläre Ort $\mathrm{Sing}(C)$ der irreduziblen Ebenen Kurve $C = V(f)$.

a) (2 P.) Berechnen Sie den singulären Ort der Neillschen Parabel $V(Y^2 - X^3)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sing}(C) &= V(Y^2 - X^3, 3X^2, 2Y)\\ &= V(Y^2 - X^3) \cap (V(X) \cap V(Y))\\ &= \{(0,0)\}\end{aligned}$$

* * *

b) (3 P.) $\mathrm{Sing}(C)$ ist eine echte algebraische Teilmenge von C.

Lösung: Dass $\mathrm{Sing}(C)$ eine algebraische Teilmenge von C ist folgt direkt aus der Definition von $\mathrm{Sing}(C)$. Noch zu zeigen ist dass es ein $P \in C$ gibt mit $P \notin \mathrm{Sing}\, C$. f ist irreduzibel, und die Ableitungen werden den Grad von f erniedrigen. Und so, ist aus Gradbegründungen mindestens ein von $\partial f/\partial x_i \notin (f)$. Daher, da $(f) = I(V(f)) = \{g : g(P) = 0 \forall P \in V(f)\}$ muss es ein $P \in V(f)$ geben mit $\partial f/\partial x_i(P) \neq 0$. Daher ist $\mathrm{Sing}(C) \neq C$.

* * *

c) (3 P.) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und sei $f_\lambda = Y^2 - X(X-1)(X-\lambda) \in \mathbb{C}[X,Y]$. Nachdem Sie die erste Aufgabe benutzt haben, um zu zeigen, dass die Ebene Kurve $C_\lambda = V(f_\lambda)$ irreduzibel ist, zeigen Sie, dass sie außer für $\lambda = 0, 1$ auch nichtsingulär ist, d.h. $\mathrm{Sing}(C_\lambda) = \emptyset$ für $\lambda \neq 0, 1$.

Lösung: Da $X(X-1)(X-\lambda)$ von ungerade Grad ist, ist es auf keinem Fall ein Quadrat, und daher ist f_λ irreduzibel nach die Aufgabe 8.1. Die singuläre Lokus ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Sing}(C_\lambda) &= V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda), 2Y, X(X-1) + X(X-\lambda) + (X-1)(X-\lambda))\\ &= C_\lambda \cap (V(X) \cup V(X-1)) \cap (V(X) \cup V(X-\lambda)) \cap (V(X-1) \cup V(X-\lambda))\end{aligned}$$

Ist $\lambda \in \{0,1\}$, dann hat dieses ein nichtleeres Schnitt, ansonsten, jedoch, muss jede Punkt in $\mathrm{Sing}(C_\lambda)$ eine X-koordinate in $\{0,1\} \cap \{0,\lambda\} \cap \{1,\lambda\}$ haben, und da jede mögliches Wert in eine der Mengen ausgeschlossen wird, ist dies unmöglich.

* * *

d) Ist $g \in k[X,Y]$ mit $g \notin I(C)$, so gibt es ein $P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ mit $g(P) \neq 0$.

Lösung: Da $g \in k[X,Y]$, ist $V(g) \cap C$ eine algebraische Teilmenge. Da $g \notin I(C)$ ist diese Teilmenge echt. Nun, ist $V(g) \cap C \cup \mathrm{Sing}(C) = C$, dann ist C nicht irreduzibel, was ein Widerspruch zu der Annahmen auf C ist. Also kann nicht $V(g)$ die gesamte Punkte in $C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ einhalten. Also gibt es da ein $P \notin V(g)$, d.h. mit $g(P) \neq 0$.

* * *

Aufgabe 3: Sei $C = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass C eine algebraische Menge (3 P.) und sogar eine affine Varietät ist.

Lösung: Erstens,

$$\begin{aligned} R_8 &= Y^2 - XZ \mapsto (t^4)^2 - t^3t^5 = t^8 - t^8 = 0 \\ R_9 &= X^3 - YZ \mapsto (t^3)^3 - t^4t^5 = t^9 - t^9 = 0 \\ R_{10} &= Z^2 - X^2Y \mapsto (t^5)^2 - (t^3)^2t^4 = t^{10} - t^{10} = 0 \end{aligned}$$

also verschwinden diese R_8, R_9, R_{10} unter die Abbildung $\phi\colon X \mapsto t^3, Y \mapsto t^4, Z \mapsto t^5$. Also liegen alle drei in Kern ϕ. Weiterhin, kann ein $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ mit Hilfe der Relationen ausgedrückt in den R_8, R_9, R_{10} modifiziert werden zu ein $X^a Y^b Z^c$ mit $b, c \leq 1$, denn $Y^2 = XZ, Z^2 = X^2Y$ mit niedriger $Y + Z$-Grad. Also ist jedes Monom in $k[X, Y, Z]$ kongruent zu ein X^a, X^aY, X^aZ oder X^aYZ modulo diese drei Polynome. Schliesslich ist $X^aYZ \equiv X^{a+3}$, und daher sind die Restklassen modulo (R_8, R_9, R_{10}) genau X^a, X^aY, X^aZ für $a \in \mathbb{N}$. Diese Restklassen, wiederum, werden unter ϕ auf t^{3a}, t^{3a+4} bzw. t^{3a+5} abgebildet, und da diese einander nicht vernichten können, sind keine weitere Elemente im Kern. Also ist Kern $\phi = (R_8, R_9, R_{10})$, und daher ist $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(R_8, R_9, R_{10})$ isomorph zu ein Unterring zu $\mathbb{C}[t]$, und daher ist (R_8, R_9, R_{10}) Prim und hat Verschwindungsmenge C.

* * *