Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 — Lösungen zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1: (3 P.) Seien I, J zwei Ideale in $k[X_1, \ldots, X_n]$, wobei k selbstverständlich ein Körper ist. Zeigen Sie: es ist

$$V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)\,.$$

Lösung: Liegt $P \in V(I) \cup V(J)$, dann ist entweder $f(P) = 0$ für alle $f \in I$, oder $g(P) = 0$ für alle $g \in J$. Insbesondere gilt $f(P) = 0$ für alle $f \in I \cap J$, und daher liegt $P \in V(I \cap J)$. Daher folgt $V(I) \cup V(J) \subseteq V(I \cap J)$.

Es gilt $I \cap J \supseteq I \cdot J$, und durch die Umkehrung der Inklusionen erhalten wir daraus $V(I \cap J) \subseteq V(I \cdot J)$. Nun, aber, ist $P \in V(I \cdot J)$, dann ist $0 = (fg)(P) = f(P)g(P)$ für alle $f \in I, g \in J$. Da die Polynomring $k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Integritätsbereich ist, gilt daher entweder $f(P) = 0$ oder $g(P) = 0$. Gilt $f(P) = 0$ für alle $f \in I$, dann ist $P \in V(I)$. Ist $f_0 \in I$ mit $f_0(P) \neq 0$, dann ist $f_0(P)g(P) = 0$ für alle $g \in J$, und daher $g(P) = 0$ für alle $g \in J$, und daher ist $P \in V(J)$.

* * *

Aufgabe 2: (5 P.) Sei k ein unendlicher Körper. Wir wollen zeigen, dass die Neillsche Parabel $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(k) \mid y^2 = x^3\}$ eine affine Varietät ist, und dass das Ideal $J = (Y^2 - X^3) \lhd k[X, Y]$ mit dem Ideal $I(C)$ der Neillschen Parabel übereinstimmt.

Sei hierzu $\phi\colon k[X, Y] \to k[T]$ der k-Algebrenhomomorphismus, der durch $X \mapsto T^2$, $Y \mapsto T^3$ induziert wird.

a) Zeigen Sie: es ist $J \subseteq \mathrm{Kern}(\phi)$, und jedes $f(X, Y) \in k[X, Y]$ in einer Nebenklasse von J der Art $g(X)Y + h(X) + J$ liegt.

Lösung: Ist $f \in J$, dann ist $f = f' \cdot (Y^2 - X^3)$, und $\phi(f) = \phi(f') \cdot ((T^3)^2 - (T^2)^3) = 0$. Also ist $f \in \mathrm{Kern}\,\phi$.

Für ein $f \in k[X, Y]$ können wir $f = f_0(X, Y)(Y^2 + g_0(X)Y + h_0(X))$ schreiben. Dann, aber, ist $f - f_0 \cdot (Y^2 - X^3) = f_0 Y^2 + g_0 Y + h_0 - f_0(Y^2 - X^3) = f_0 X^3 + g_0 Y + h_0$ mit $\deg_Y f_0 \leq \deg_Y f - 2$. Schreiben wir nun f_0 als $f_1(X, Y)Y^2 + g_1(X)Y + h_1(X)$ können wir diese Konstruktion wiederholen, und kriegen letztendlich eine Sequenz von f_n, g_n, h_n mit $f = (g_0 + g_1 + \cdots + g_n)Y + (h_0 + \cdots + h_n) + (f_0 + \cdots + f_n)J$, denn $\deg f_i \leq \deg f_{i-1} - 2$, und so muss irgendwann die Grad von f_n klein genug werden dass die Konstruktion aufhört.

* * *

b) Folgern Sie, dass $J = \mathrm{Kern}(\phi)$ ist. Schließen Sie hieraus, dass J ein Primideal in $k[X, Y]$ ist.

Lösung: Ist $f \in \operatorname{Kern}\phi$, dann ist $g(T^2)T + h(T^2) = 0$. Nun sind aber alle Terme in $g(T^2)T$ von ungerade T-grad, und alle Terme in $h(T^2)$ von gerade T-grad. Also können keine Terme in g die in h vernichten, und so muss $g = h = 0$. Also folgt aus $f \in \operatorname{Kern}\phi$ dass $f \in J$.

Daher ist $k[X, Y]/J$ ein Unterring zu ein Integritätsbereich, und also selbst ein Integritätsbereich. Daraus folgt dass J prim ist.

* * *

c) Zeigen Sie, dass jedes $f \in I(C)$ im Kern von ϕ liegt. Folgern Sie, dass $I(C) = J$ gilt, und dass C eine affine Varietät ist.

Lösung: Ist $f \in I(C)$, dann gilt für $\{(x, y) : x^3 = y^2\}$ dass $f(x, y) = 0$. Dann gilt, aber, für $f(T^2, T^3)$ dass $(T^2)^3 = (T^3)^2$, und daher $f(T^2, T^3) = 0$ für alle T. Also ist $f \in \operatorname{Kern}\phi$. auch gilt, dass wenn $f \in \operatorname{Kern}\phi$, dann gilt für x, y mit $x^3 = y^2$ dass $f(x, y) = f(x, \pm\sqrt{x^3}) = f(\pm\sqrt{x}^2, \pm\sqrt{x}^3)$ und mit $T = \sqrt{x}$ ist das gleich zu $f(T^2, T^3) = 0$, und also ist $f \in I(C)$. Also $J = \operatorname{Kern}\phi = I(C)$ und da affine Varietäten genau durch Primideale erzeugt werden sind wir durch.

* * *

Aufgabe 3: (4 P.) Zerlegen Sie $V(X^2Y - XY^2) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ und $V(YX - YZ, XYZ - Z) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ als Vereinigungen von affinen Varietäten.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} V(X^2Y - XY^2) &= V(XY(X - Y)) \\ \text{siehe Aufgabe 7.1} &= V(X) \cup V(Y) \cup V(X - Y) \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} V(YX - YZ, XYZ - Z) &= V(Y(X - Z), Z(XY - 1)) \\ &= V(Y(X - Z)) \cap V(Z(XY - 1)) \\ &= (V(Y) \cup V(X - Z)) \cap (V(Z) \cup V(XY - 1)) \\ \text{Distributivität von } \cup \text{ und } \cap &= (V(Y) \cap V(Z)) \cup (V(Y) \cap V(XY - 1)) \cup (V(X - Z) \cap V(Z)) \cup (V(\\ &= V(Y, Z) \cup V(Y, XY - 1) \cup V(X - Z, Z) \cup V(X - Z, XY - 1) \end{aligned}$$

Nun ist $V(Y, XY - 1)$ leer, denn ist $P \in V(Y, XY - 1)$, dann ist $P_Y = 0$, aber $P_X P_Y = 1$. Algebraisch ist $1 \in (Y, XY - 1)$, denn $X \cdot Y - (XY - 1) = 1$. Auch ist $(Z, X - Z) = (X, Z)$, denn $X - Z + Z = X$.

Also ist die Zerlegung $V(Y, Z) \cup V(X, Z) \cup V(X - Z, XY - 1)$ in zwei Achsen und eine Hyperbel eingebettet in die Ebene $X = Z$.

* * *

Aufgabe 4: (4 P.) Zeigen Sie:

a) $SL_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$ ist eine affine algebraische Menge in $\mathbb{A}^4(\mathbb{C})$.

Lösung: Ein Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird als $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ in $\mathbb{A}^4(\mathbb{C})$ eingebettet. Dann ist $SL_2(\mathbb{C}) = V(x_1x_4 - x_2x_3 - 1$ durch die Determinantenbedingung.

* * *

b) $SL_2(\mathbb{C})$ ist sogar eine affine Varietät. *Hinweis*: Benutzen Sie folgendes Korollar des Nullstellensatzes: Ist $I \lhd \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Primideal, dann ist $I(V(I)) = I$, und $V(I)$ ist irreduzibel.

Lösung: $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_4]$ ist ein faktorieller Ring, und daher ist ein Hauptideal (f) prim genau dann, wenn f irreduzibel ist. Nun, wäre $f = x_1x_4 - x_2x_3 - 1$ reduzibel, dann, da $\operatorname{grad}_{x_1} f = 1$ muss für $f = gh$ oBdA g von x_1-Grad 1 und h von 0 sein. Da, aber, $f = x_4x_1 + (-x_2x_3 - 1)$ und x_4 keine gemeinsame Teiler mit $x_2x_3 + 1$ hat, folgt dass keine solche g, h existieren. Daher ist f irreduzibel, und so $SL_2(\mathbb{C})$ eine Varietät.

* * *

Aufgabe 5: Ist I ein Ideal im kommutativen Ring R, so wird das Radikal $\sqrt{I}$ durch $\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \geq 1 \text{ mit } a^n \in I\}$ definiert. In der Vorlesung wird gezeigt: I ist ein Ideal. Berechnen Sie $\sqrt{I}$ für das Ideal $I = (X^3Y - Y^2) \lhd \mathbb{C}[X, Y]$.

Lösung: $I = (X^3Y - Y^2) = (Y(X^3 - Y))$. Nun ist f so dass $f^n \in I$, dann muss $f^n = g \cdot Y \cdot (X^3 - Y)$. Dann, aber, sind Y und $X^3 - Y$ auch in f Faktoren, und daherist $f \in I$. So $\sqrt{I} = I$.

* * *