Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 Lösungen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Ein kommutativer Ring R heißt dann ganz abgeschlossen in einem Erweiterungsring S, wenn jedes $\alpha \in S$, das über R ganz ist, bereits in R liegt, d.h. wenn $\bar{R} = R$ gilt. So besagt Korollar 10.6, dass $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ ganz abgeschlossen ist. Dagegen ist $\mathbb{Z}$ nicht in $\mathbb{C}$ ganz abgeschlossen, wie etwa der Fall $\alpha = i$ zeigt. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

a) (2 P.) $\mathbb{Z}[i]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(i)$.

Lösung: Jedes $a + bi$ ist eine Nullstelle von $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, und so ist $\mathbb{Z}[i]$ ganz über $\mathbb{Z}$. Weiterhin, da $\mathbb{Q}(i)$ ein Integritätsbereich und $\mathbb{Z}$ faktoriell sind, hat jedes $\alpha \in \mathbb{Q}(i)$ das ganz über $\mathbb{Z}$ ist eine normierte Minimalpolynom in $\mathbb{Z}[x]$. Wäre nun $a+bi \in \mathbb{Q}(i)$ ganz über $\mathbb{Z}$, dann wäre $2a \in \mathbb{Z}$ und $a^2+b^2 \in \mathbb{Z}$. Daher müsste $2a \in \mathbb{Z}$, $(2a)^2 = -(2b)^2 \pmod 4$, und so musste $2a = 2b = 0 \pmod 2$. Daher sind alle ganze $a + bi \in \mathbb{Q}(i)$ schon in $\mathbb{Z}[i]$ enthalten und $\mathbb{Z}[i]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(i)$.

* * *

b) (2 P.) $\mathbb{Z}[2i]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(2i)$.

Lösung: $i = \frac{1}{2} \cdot 2i \in \mathbb{Q}(2i)$ mit $i^2+1 = 0$, und daher ist i ganz über $\mathbb{Z}[2i]$ mit normiertes Polynom $X^2 + 1$. Jedoch ist $i \notin \mathbb{Z}[2i]$. Daher ist $\mathbb{Z}[2i]$ nicht ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(2i)$.

* * *

c) (2 P.) $\mathbb{Z}[i]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

Lösung: $\sqrt{2}$ hat normiertes Polynom $X^2 - 2$ über $\mathbb{Z}[i]$, ist jedoch nicht in $\mathbb{Z}[i]$ enthalten. Also ist $\mathbb{Z}[i]$ nicht ganz abgeschlossen.

* * *

d) (2 P.) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Lösung: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-5}}{2}$ ist ganz in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, jedoch nicht ein Element aus $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, und daher ist $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ nicht ganz abgeschlossen.

* * *

e) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.

Lösung: Mit die Charakterisation der ganze Elemente in $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ vom letzten Übungsblatt können wir feststellen, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ ist.

* * *

Hinweis: Korollar 10.4 benutzen.

Aufgabe 2: Sei R die $\mathbb{C}$-Algebra $R = \mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_n]/I$. Führen Sie Noether-Normalisierung für R aus.

a) (2 P.) Im Fall $n = 3$, $I = (X_1^3 - X_2^2, X_1^2 + X_3^2 - 1)$.

Lösung: Wir setzen $x = X_1 + I$, $y = X_2 + I$, $z = X_3 + I$. z ist ganz über $\mathbb{C}[x, y]$, denn $z^2 + x^2 - 1 = 0$. y ist ganz über $\mathbb{C}[x]$, denn $y^2 - x^3 = 0$. Letztendlich ist x algebraisch unabhängig, denn für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ können wir ϕ durch $x \mapsto \alpha$, $y \mapsto \beta : \beta^3 = \alpha^2$ und $z \mapsto i\sqrt{\alpha^2 + 1}$ setzen. Dann ist $\phi(x^3 - y^2) = \alpha^3 - \beta^2 = 0$ und $\phi(x^2 + z^2 - 1) = \alpha^2 + (i\sqrt{(\alpha + 1)})^2 - 1 = \alpha^2 - \alpha^2 + 1 - 1 = 0$. Also ist ϕ ein Algebrahomomorphismus $R \to \mathbb{C}$, die x auf ein beliebiges α abbildet, und daher ist x unabhängig laut Korollar 10.8.

* * *

b) (2 P.) Im Fall $n = 2$, $I = (X_1^2 + X_2^2 - 1, X_2 - X_1^2)$.

Lösung: Setze $x = X_1 + I$, $y = X_2 + I$. Dann ist y ganz über $\mathbb{C}[x]$, denn $y - x^2 = 0$. Eine Umschreibung der Relationen ergibt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + x^4 - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

und daher ist x ganz über $\mathbb{C}$.

* * *

c) (2 P.) Im Fall $n = 2$, $I = (X_1^2 X_2, X_1 X_2^2)$.

Lösung: Wir erhalten durch $\hat{X}_1 = X_1 - \lambda X_2$ die neuen Relationen

$$\begin{aligned} \lambda^2 X_2^3 + 2\lambda \hat{X}_1 X_2^2 + \hat{X}_1^2 X_2 &= 0 \\ \lambda X_2^3 + \hat{X}_1 X_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

und mit $\lambda = 1$ ergibt dies die Relationen

$$\begin{aligned} X_2^3 + 2\hat{X}_1 X_2^2 + \hat{X}_1^2 X_2 &= 0 \\ X_2^3 + \hat{X}_1 X_2^2 & \end{aligned}$$

Dies zeigt dass $X_2 + I$ ganz über $\mathbb{C}[\hat{X}_1 + I]$ ist.

Nun, für ϕ definiert durch $X_1 \mapsto \alpha$, $X_2 \mapsto 0$ ergibt sich erstens $\phi(\hat{X}_1) = \phi(X_1 - X_2) = \alpha - 0 = \alpha$, und weiterhin $\phi(X_1^2 X_2) = \alpha^2 \cdot 0 = 0 = \alpha \cdot 0^2 = \phi(X_1 X_2^2)$, und daher ist ϕ eine Algebrahomomorphismus, wie benötigt. Daher ist $\hat{X}_1 + I$ algebraisch unabhängig.

* * *

d) (2 P.) Im Fall $n = 3$, $I = (X_1X_2, X_1X_3)$.

Lösung: Wir setzen $x = X_1 + I$, $y = X_2 + I$, $z = X_3 + I$. Mit $\hat{x} = x - z$ erhalten wir die neuen Relationen

$$\begin{aligned} \hat{x}y + yz &= 0 \\ z^2 + \hat{x}z &= 0 \end{aligned}$$

und können daraus schließen, dass z ganz über $\mathbb{C}[\hat{x}, y]$ ist. Weiterhin ist, für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, wenn wir eine Abbildung ϕ für das Korollar 10.8 benutzen wollen, die Bedingungen auf ϕ wie folgt:

$$\begin{aligned} \phi(\hat{x}) = \phi(x - z) &= \alpha \\ \phi(y) &= \beta \\ \phi(xy) = \phi(xz) &= 0 \end{aligned}$$

Setzen wir nun $x \mapsto 0$, $y \mapsto \beta$ und $z \mapsto -\alpha$, können wir leicht verifizieren, dass alles stimmt. Daher sind $\hat{x}, y$ algebraisch unabhängig, mit z ganz über $\mathbb{C}[\hat{x}, y]$.

* * *

e) Im Fall $n = 3$, $I = (X_2^2X_3 + X_2X_3^2, X_1X_2X_3)$.

Lösung: Setzen wir erst $x = X_1 + I$, $y = X_2 + I$, $z = X_3 + I$, dann ist mit $\hat{y} = y - \lambda z$ die Relationen

$$\begin{aligned} (\hat{y} + \lambda z)^2 z + (\hat{y} + \lambda z)z^2 = (\lambda^2 + \lambda)z^3 + (2\hat{y}\lambda + \hat{y})z^2 + \hat{y}^2 z &= 0 \\ x\hat{y}z + \lambda x z^2 &= 0 \end{aligned}$$

und so wählen wir ein λ mit $\lambda^2 + \lambda = 1$. Die entsprechende quadratische Gleichung hat Lösung $\lambda = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, und mit dem Wahl von $\lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ erhalten wir die Relationen

$$\begin{aligned} z^3 + \sqrt{5}\hat{y}z^2 + \hat{y}^2 z &= 0 \\ x\hat{y}z + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} x z^2 &= 0 \end{aligned}$$

Daher ist z ganz über $\mathbb{C}[x, \hat{y}]$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ können wir die Abbildung ϕ mit $x \mapsto \alpha$, $y \mapsto \beta$, $z \mapsto 0$ ansetzen. Dann ist $\phi(\hat{y}) = \phi(y - \lambda z) = \beta - \lambda \cdot 0 = \beta$, $\phi(y^2 z + yz^2) = 0$ und $\phi(xyz) = 0$, und daher entspricht ϕ die Voraussetzungen in Korollar 10.8, und so sind $x, \hat{y}$ algebraisch unabhängig.

* * *