Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 — Lösungen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1: (4 P.) Die abelsche Gruppe G wird von den Elementen a, b, c, d erzeugt, die die folgenden Relationen erfüllen: $3b + 2c + 8d = 0$, $5a + b + 8d = 4c$, $b + 4c = 2a + 8d$, $-a + 3b + 2c + 8d = 0$. Bestimmen Sie die invarianten Faktoren und die Elementarteiler von G.

Lösung: Wir können die Relationen als dem Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

Durch bearbeiten der Matrix mit zulässigen Operationen können wir schliesslich einen Form finden, der möglichst kleine und durchaus sich nacheinander teilende Relationen zeigt. In jedes Schritt versuchen wir in die gerade zu behandelnde niedere/rechte Teilmatrix mit dem größte gemeinsamen Teiler der Teilmatrix oben links hinzukriegen, damit wir danach die entsprechende Zeilen und Kolonnen damit vernichten können. Für dieses

Beispiel läuft es wie folgt

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Austausch erste und zweite Zeile

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 3 & -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Austausch erste und zweite Kolonne

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 8 \\ 0 & -15 & 14 & -16 \\ 0 & -7 & 8 & -16 \\ 0 & -16 & 14 & -16 \end{pmatrix}$$

Erste Zeile zu den drei andere dazugezählt

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 14 & -16 \\ 0 & -7 & 8 & -16 \\ 0 & -16 & 14 & -16 \end{pmatrix}$$

Erste Kolonne zu den drei anderen dazugezählt

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & -16 \\ 0 & 9 & 8 & -16 \\ 0 & 0 & 14 & -16 \end{pmatrix}$$

Letzte Kolonne vom ersten abgezogen

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & -16 \\ 0 & 0 & -118 & 128 \\ 0 & 0 & 14 & -16 \end{pmatrix}$$

Zweite Zeile zu der dritten Zeile dazugezählt

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -118 & 128 \\ 0 & 0 & 14 & -16 \end{pmatrix}$$

Zweite Kolonne zu den zwei restlichen dazugezählt

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -16 \\ 0 & 0 & -118 & 128 \end{pmatrix}$$

Dritte und vierte Zeilen ausgetauscht

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 10 & 128 \end{pmatrix}$$

Vierte Kolonne zu der dritten Kolonne dazugezählt

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

Vorzeichenwechsel der dritten Zeile, danach zugezählt zu den vierten Zeile

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}_2$$

Dritte Kolonne zu der vierten dazugezählt

Danach können wir ablesen, dass $G \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/48$. Eine Faktorisierung ergibt die Elementarteiler $2, 3, 16$.

$* \quad * \quad *$

Aufgabe 2: Sei R der Unterring $R = \{p \in \mathbb{Q}[X] \mid p(0) \in \mathbb{Z}\}$ des $\mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

a) (2 P.) Für alle $p, q \in R$ ist das Ideal $(p, q) \lhd R$ ein Hauptideal. *Hinweis*: Induktion über $\mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q)$. Achten Sie insbesondere auf den Fall $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(q)$.

Lösung: Schreiben wir $\mathrm{LC}(f)$ für das führende Koeffizient von f.

Ist $\mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q) = 0$, so ist $p, q \in \mathbb{Z}$, und daher ist $(p, q) = (\mathrm{ggT}(p, q))$, denn jedes $fp + gq = f' \,\mathrm{ggT}(p, q)$ für irgendein $f \in R$.

Nehmen wir nun an dass für alle p, q solche dass $\mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q) < n$, es ein r gibt, mit $(p, q) = (r)$. Nehmen wir ein bestimmtes Paar p, q mit $d = \mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q) = n$. OBdA können wir annehmen, dass $\mathrm{grad}(q) \leq \mathrm{grad}(p)$ ist. Wir setzen $f = \mathrm{LC}(q)p - \mathrm{LC}(p)qX^d$. Dann ist $f \in (p, q)$ und zusätzlich $\mathrm{grad}(f) < \mathrm{grad}(p)$. Daher ist $\mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(q) < n$, und es gibt ein r mit $(f, q) = (r)$. Weiterhin ist $p = (f - \mathrm{LC}(p)qX^d)/\,\mathrm{LC}(q)$, und so $p \in (f, q)$. Damit haben wir gezeigt, dass $(p, q) = (r)$, was die Induktion abschliesst.

$* \quad * \quad *$

b) (2 P.) Das Ideal $I = (X/2, X/4, X/8, \ldots, X/2^n, \ldots) \lhd R$ ist kein Hauptideal.

Lösung: Ist I ein Hauptideal, dann gibt es ein $r \in R$ mit $X/2^m = p_m r$ für jedes m. Jedoch, da $\mathbb{Q}$ kein Torsion hat, ist $\mathrm{grad}(p_m r) = \mathrm{grad}(p_m) + \mathrm{grad}(r)$, und so muß entweder p_m oder r Grad 1 haben, und die andere Grad 0. Ist nun $\mathrm{grad}(r) = 0$, dann ist $r \in \mathbb{Z}$, und so $I = rR = \{p \in \mathbb{Q}[X] : p(0) \in r\mathbb{Z}\}$. Dies enthält, jedoch, mehr Elemente als I als oben gegeben. Daher mussen die p_m von Grad 0 sein, und $r = \frac{a}{b}X + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Das heißt aber dass für $b = 2^k b'$ mit $2 \not| b'$ ist $X/2^{k+1} \notin rR$. Daher ist I kein Hauptideal.

$* \quad * \quad *$

c) (1 P.) Jedes e.e. Ideal in R ist ein Hauptideal, aber R ist nicht noethersch.

Lösung: Da R ein Ideal enthält, die nicht endlich erzeugt ist, ist R auf keinen Fall noethersch. Jedoch, ist I ein endlich erzeugtes Ideal in R, mit $I = (p_1, \ldots, p_m)$, dann ist können wir eine Reihe $r_1, \ldots, r_{m-1}$ finden mit $(r_1) = (p_1, p_2)$, $(r_2) = (r_1, p_3)$, usw bis $(r_{m-1}) = (r_{m-2}, p_m) = I$.

$* \quad * \quad *$

Aufgabe 3: Wir zeigen, dass der Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ noethersch aber nicht faktoriell ist. Hierfür benutzen wir die Normabbildung $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$.

a) Die Elemente 2, 3, $1+\sqrt{-5}$ und $1-\sqrt{-5}$ sind alle irreduzibel in R. Dieser Ring ist nicht faktoriell.

Lösung: Wir können erst verifizieren, dass N mit die gegebene Definition tatsächlich multiplikativ ist: $N(ab) = N(a)N(b)$. Weiterhin gelten

$$\begin{aligned} N(2) &= 4 \\ N(3) &= 9 \\ N(1+\sqrt{-5}) &= 6 \\ N(1-\sqrt{-5}) &= 6 \end{aligned}$$

Angenommen $2 = ab$. Dann muss eins von folgende halten:

$$\begin{aligned} N(a) &= 4 & N(b) &= 1 \\ N(a) &= 1 & N(b) &= 4 \\ N(a) &= 2 & N(b) &= 2 \end{aligned}$$

Die zwei ersten Fälle wurden 2 irreduzibel implizieren. Die letzte Fall kann nur dann passieren, wenn $a = \alpha + \beta\sqrt{-5}$ mit $\alpha^2 + 5\beta^2 = 2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Dies, jedoch, zeigt eine leichte Überlegung unmöglich zu sein.

Ähnlich können wir für 3 und $1 \pm \sqrt{-5}$ zeigen, dass sie irreduzibel sein müssen, denn für die Faktorisierungen der Norme gibt es nur die nichttriviale Faktorisierung $3 \cdot 3$ bzw. $2 \cdot 3$, und weder 2 noch 3 sind zulässige Norme laut die vorherige Argument.

Daher sind alle vier Elemente irreduzibel. Jedoch ist $2 \cdot 3 = 6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$, und daher ist der Ring nicht faktoriell.

* * *

b) (2 P.) Ist $\{0\} \neq I \lhd R$, so hat der Quotientenring R/I nur endlich viele Elemente. *Hinweis*: Ist $0 \neq a \in I$, dann $N(a) \in I \cap \mathbb{N}$.

Lösung: Für $a = \alpha+\beta\sqrt{-5} \in I$ ist $(\alpha+\beta\sqrt{-5})(\alpha-\beta\sqrt{-5}) = \alpha^2+5\beta^2 = N(a) \in I$. Da $N(a) \in \mathbb{Z}$ ist $N(A) \in \mathbb{Z} \cap I$. Ist $\mathbb{Z} \cap I \neq (0)$, dann ist $|\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cap I| < \infty$ und daher folgt die Aussage wenn wir zeigen können, dass $|N^{-1}(n)| < \infty$ für jedes n. Andererseits, wenn $a^2 + 5b^2 = n$, dann muss $0 \leq a \leq \sqrt{n}$ und $0 \leq b \leq \sqrt{\frac{n}{5}}$, und daher gibt es auf keinem Fall mehr als $(\sqrt{n}+1)(\sqrt{\frac{n}{5}}+1)$ mögliche Kandidate für Lösungen zu $N(a) = n$. Daher ist $|R/I| < \infty$.

* * *

c) (2 P.) R ist noethersch.

Ist R bezüglich der Norm N ein euklidischer Ring?

Lösung: Ist $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \ldots$ eine streng aufsteigende Kette von nicht-null Ideale in R, dann ist $R/I_1 \supsetneq R/I_2 \supsetneq \ldots$, und daher $|R/I_1| \gneq |R/I_2| \gneq \ldots$. Jedoch sind alle diese endliche Kardinalzahlen in eine streng absteigende Kette. Daher muss die Kette irgendwann aufhören, und daher ist der Ring tatsächlich noethersch.

Jedoch, da jede euklidischer Ring ein faktorieller Ring ist, ist dieses R kein euklidischer Ring.

* * *

Aufgabe 4: Sei R ein noetherscher Integritätsbereich, und sei $x \in R$ weder 0 noch eine Einheit. Zeigen Sie:

a) (2 P.) x hat einen irreduziblen Faktor.

Lösung: Ist x irreduzibel, dann ist x selbst dieser Faktor. Also nehmen wir an, dass x nicht irreduzibel sei. Dann ist $x = u_0 v_0$. Ist v_0 irreduzibel, so sind wir wieder fertig, also können wir annehmen dass v_0 nicht irreduzibel sei. Wiederholen dieses Argument gibt uns eine Kette von $\dots |v_3|v_2|v_1|v_0|x$, und $x = u_0 u_1 \dots u_n v_n$ für jedes n, und mit v_i nicht irreduzibel in jedes Schritt.

Daraus können wir eine Kette von Hauptidealen erzeugen

$$(x) \supseteq (v_0) \supseteq (v_1) \dots$$

Da R noethersch ist, gibt es ein n_0 mit $(v_n) = (v_{n_0})$ für alle $n > n_0$. Das heißt aber genau dass $v_{n_0}|v_n$ und $v_n|v_{n_0}$, und daher ist $v_n = uv_{n_0}$ für ein Einheit u. Also ist für $n = n_0 + 1$ die Faktorisierung $v_{n_0} = uv_{n_0+1}$ keine Faktorisierungen in Reduzibeln. Daher ist v_{n_0} irreduzibel.

* * *

b) (1 P.) x hat eine Faktorisierung als Produkt von irreduziblen Elementen.

Lösung: Ist $x = u_0 v_0$ mit v_0 irreduzibel, $u_i = u_{i+1} v_{i+1}$ mit jede v_i irreduzibel, so ist

$$(u_0) \supseteq (u_1) \supseteq \dots$$

eine Kette. Da der Ring noethersch ist, terminiert die Kette, und daher ist $x = uv_n v_{n-1} \dots v_1 v_0$ für u eine Einheit.

* * *

Aufgabe 5: Finden Sie einen noetherschen Ring mit der folgenden Eigenschaft: für jedes $n \geq 0$ gibt es eine echt aufsteigende Kette $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_n$ von Idealen in R.

Lösung: Sei R kommutativ. Dann ist in $R[x]$ die Kette

$$(x^n) \subsetneq (x^{n-1}) \subsetneq \dots \subsetneq (x)$$

von die gewünschte Länge. $R[x]$ ist noethersch laut Hilberts Basissatz.

* * *

Aufgabe 6: Sei R ein Hauptidealring und M ein e.e. R-Modul. Zeigen Sie: Sind F, F' zwei freie R-Moduln vom endlichen Rang und $N \subseteq F$, $N' \subseteq F'$ Untermoduln derart, dass $F/N \cong F'/N' \cong M$ gilt, dann ist $\mathrm{Rang}(F) + \mathrm{Rang}(N') = \mathrm{Rang}(F') + \mathrm{Rang}(N)$.

Lösung: Laut der Struktursatz der endlich erzeugten Moduln über ein Hauptidealring ist

$$M = R^r \oplus R/a_1 \oplus R/a_2 \oplus \dots \oplus R/a_m$$

Also folgt aus $F/N \cong M$

$$N = \{0\}^r \oplus R^k \oplus a_1 R \oplus a_2 R \oplus \dots \oplus a_m R$$

und daher $\mathrm{Rang}(F) - \mathrm{Rang}(N) = r$. Aus dieses Zusammenhang folgt dann

$$\mathrm{Rang}(F) - \mathrm{Rang}(N) = \mathrm{Rang}(F') - \mathrm{Rang}(N')$$

woraus das Ergebnis folgt.

*   *   *