Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 — Lösungen zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Sei R ein Ring. Die folgenden Aussagen wurden bereits in der Vorlesung benutzt, z.T. stillschweigend. Weisen Sie sie nach.

a) (2 P.) Sind M_1, M_2 zwei R-Moduln und $U_1 \subseteq M_1$, $U_2 \subseteq M_2$ zwei Untermoduln, so ist $U_1 \oplus U_2$ ein Untermodul von $M_1 \oplus M_2$, und $(M_1 \oplus M_2)/(U_1 \oplus U_2) \cong (M_1/U_1) \oplus (M_2/U_2)$.

Lösung: Man betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon M_1 \oplus M_2 &\to M_1/U_1 \oplus M_2/U_2 \\ (m_1, m_2) &\mapsto (m_1 + U_1, m_2 + U_2) \end{aligned}$$

Dies ist eine surjektive Modulabbildung, mit $\operatorname{Kern} f = U_1 \oplus U_2$ und die Isomorphie folgt aus dem Isomorphiesatz.

* * *

b) (2 P.) Jeder zyklischer R-Modul ist zu einem Modul der Art R/I isomorph, wobei I ein Linksideal in R ist.

Lösung: Ist M ein zyklischer R-Modul, dann ist $M = Rm$ für ein Generator $m \in M$. Nun ist jede endlich erzeugter R-Modul ein Quotient von einen freien R-Modul von Rank gleich der Anzahl der Erzeuger. Also ist, für dieses M,

$$M = R/\operatorname{Kern} \mu_m$$

mit $\mu_m(r) := rm$ und daher $\operatorname{Kern} \mu_m = \operatorname{Ann}_R(m)$. $\operatorname{Ann}_R(m)$, schließlich, ist ein Ideal I in R.

* * *

Aufgabe 2: (4 P.) Wieviele Möglichkeiten gibt es, den $\mathbb{Z}$-Modul $M = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2$ als eine direkte Summe $A \oplus B$ zu zerlegen, wobei A, B Untermoduln sind, $\operatorname{Tor}(A) = A$ gilt, und B frei ist?

Eine andere Formulierung derselben Aufgabe: Sind die Untermoduln A, B eindeutig durch die Bedingungen

$$M = A + B, \quad A \cap B = \{0\}, \quad A = \operatorname{Tor}(A), \quad B \text{ ist ein freier Modul}$$

bestimmt? Wenn nicht, wie viele mögliche Paare A, B gibt es?

Lösung: Erstens beobachten wir dass $(0, 0, 0, x, y) \in \operatorname{Tor}(M)$ für alle $x \in \mathbb{Z}/6, y \in \mathbb{Z}/2$. Weiterhin ist $(x, y, z, 0, 0) \notin \operatorname{Tor}(M)$ für alle $x, y, z \neq 0$. Ein freier $\mathbb{Z}$-Modul F hat $\operatorname{Tor}(F) = 0$, also müsste in ein solcher Zerlegung $\operatorname{Tor}(B) = 0$ sein. Das heißt A kann kein Summanden $\mathbb{Z}$ enthalten, und B kann kein Summanden $\mathbb{Z}/m$ enthalten. Also ist die Zerlegung (bis auf Permutation der Summanden) eindeutig.

* * *

Aufgabe 3: Finden Sie die invarianten Faktoren von $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/3$ (1 P.) und von $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/7$ (2 P.). Beschreiben Sie dann die allgemeine Vorgehensweise, um die invarianten Faktoren aus den Elementarteilern zu gewinnen (2 P.).

Lösung: Erstens ist $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/3 \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/12$, und daher sind die invarianten Faktoren im ersten Teil $2, 12$.

Für die größere Ausdrück stellen wir erst die invarianten Faktoren als Ketten dar, mit jede Reihe Exponenten von einer Primzahl, und immer höhere Exponenten, damit alles links das weiter rechts teilt:

2	2	4	8
		3	9
	5	5	5
			7
2	10	60	2520

Dies gibt eine Methode koprime invariante Faktoren so zusammenzugliedern, dass die jeweiligen grössen sich nach und nach Teilen; und daher stellt dies auch eine allgemeine Methode dar, aus invariante Faktoren Elementarteiler zu gewinnen.

Für den allgemeinen Fall reiht man die Primzahlexponenten so auf, dass sie rechts aufgereiht sind, und jede Reihe immer größere Exponente aufzeigt nach rechts. Die Kolonnprodukte ergeben dann die erwünschte Elementarteilern.

* * *

Aufgabe 4: (3 P.) Sei R ein Integritätsbereich, sei M ein R-Modul, sei $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem für M, und sei $b_1, \dots, b_m$ ein System R-linear unabhängiger Elemente aus M. Zeigen Sie: es ist $m \leq n$.

Lösung: Ist $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem für M, dann ist $a_1/1, \dots, a_n/1$ ein Erzeugendensystem für M als $Q(R)$-Vektorraum. Daher ist ein Basis für M über $Q(R)$ nicht grösser als n, und daher ist jede $Q(R)$-linear unabhängiges System in M nicht grösser als n. Nun, wären $b_1, \dots, b_m$ $Q(R)$-linear abhängig, mit $\sum_i \frac{p_i}{q_i} b_i = 0$, dann wäre $\prod_i q_i \cdot \sum_i \frac{p_i}{q_i} b_i$ eine R-lineare abhängigkeit. Daher muss R-linear unabhängige Elemente auch $Q(R)$-linear unabhängig sein, und daher ist $m \leq n$.

* * *

Aufgabe 5: Ein Ring R bzw. ein Modul M heißt *artinsch*, wenn die Ideale in R bzw. die Untermoduln von M die absteigende Kettenbedingung (DCC) erfüllen:

> Sind $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \cdots$ Ideale bzw. Untermoduln, so gibt es ein n_0 derart, dass $X_n = X_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$.

Ist der Polynomring $\mathbb{C}[X]$ artinsch?

Lösung: $\mathbb{C}[X]$ ist nicht artinsch, denn $(X) \supseteq (X^2) \supseteq (X^3) \supseteq \dots$ ist eine unendliche absteigende Kette von Ideale.

* * *