Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 — Lösungen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1: (4 P.) Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

a) $IM = \{i_1m_1 + \cdots + i_nm_n | n \geq 0, i_j \in I, m_j \in M\}$ ist ein Untermodul von M.

Sind $\sum_k i_km_k$ und $\sum_l j_lm'_l$ Elemente aus IM, und $r \in R$. Wir können alle vorkommende Modulelemente aufzählen — μ_i mit $\mu_i = m_{\sigma(i)}$ und $\mu_i = m'_{\tau(i)}$ für irgendwelche Funktionen σ und τ. Also ist $\sum_k i_km_k - \sum_l j_lm'_l = \sum_i (i_{\sigma^{-1}(i)} - j_{\tau^{-1}(i)}\mu_i \in IM$ mit $i_j = j_j = 0$ für j so daß i_j, j_j nicht von den gegebenen Summen definiert worden. Da Ideale Untergruppen sind, ist $(i_{\sigma^{-1}(i)} - j_{\tau^{-1}(i)}) \in I$ für alle i, und daher ist das Element auf die gewünschte Form gestellt.

Weiterhin ist $r\sum_k i_km_k = \sum_k ri_km_k \in IM$, da $ri_k \in I$ für alle k.

b) Der Quotientenmodul M/IM ist ein Modul über den Quotientenring R/I.

Wir definieren eine Modulmultiplikation $R/I \times M/IM \to M/IM$ durch $(r+I)(m+IM) = rm + IM$. Diese ist wohldefiniert, denn für $r, r' \in R$ und $m, m' \in M$ so daß $r - r' \in I$ und $m - m' \in IM$ gilt

$$\begin{aligned}(r+I)(m+IM) - (r'+I)(m+IM) &= (rm+IM) - (r'm+IM)\\ &= (rm - r'm) + IM = (r-r')m + IM\end{aligned}$$

mit $(r - r') \in I$ und daher $(r - r')m \in IM$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}(r+I)(m+IM) - (r+I)(m'+IM) &= (rm+IM) - (rm'+IM)\\ &= r(m-m') + IM\end{aligned}$$

und da $m - m' \in IM$ auch $r(m - m') \in IM$.

Weiterhin ist für $r, s \in R$ und $m, n \in M$

$$\begin{aligned}((r+I)+(s+I))(m+IM) &= (r+s+I)(m+IM)\\ &= (r+s)m + IM\\ &= rm + sm + IM\\ &= (rm+IM) + (sm+IM)\\ &= (r+I)(m+IM) + (s+I)(m+IM)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(r+I)((m+IM)+(n+IM)) &= (r+I)(m+n+IM)\\ &= r(m+n) + IM\\ &= rm + rn + IM\\ &= (rm+IM) + (rn+IM)\end{aligned}$$

Auch dazu gilt

$$\begin{aligned}((r+I)(s+I))(m+IM) &= (rs+I)(m+IM) \\ &= rsm+IM \\ &= r(sm)+IM \\ &= (r+I)(sm+IM) \\ &= (r+I)((s+I)(m+IM))\end{aligned}$$

und $(1+I)(m+IM) = 1m+IM = m+IM$. Dadurch werden alle Modulaxiome verifiziert.

Aufgabe 2: (4 P.) Sei k ein Körper und R der Polynomring $R = k[x_1, x_2, \ldots]$ in abzählbar vielen Unbestimmten. Sei $I \subseteq R$ das sogenannte Augmentationsideal $I = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$. Beweisen Sie die Aussage aus der Vorlesung, dass I weder als Ideal in R noch als Untermodul von R endlich erzeugt ist.

Erstens ist, da R kommutativ ist, kein Unterschied zwischen Ideale und Untermodule in R. Weiterhin ist I/I^2 laut Aufgabe 1 ein Modul über $R/I = k$. Dieses Vektorraum hat abzählbar viele Linear unabhängige Vektoren: $x_1 + I^2, x_2 + I^2, \ldots,$ und hat daher keine endliche Basis. Hätte I eine endliche Erzeugendesystem $p_1, \ldots, p_n$, dann wäre auch $p_1 + I^2, \ldots, p_n + I^2$ erzeugende für I/I^2 und daher eine endliche Basis. Widerspruch.

Aufgabe 3: (4 P.) Finden Sie eine Basis e_1, e_2, e_3 für den freien $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ derart, dass $e_1 = (12, 15, 50)$ ist.

Erst wird auf Rank 2 reduziert: $(12, 15, 50) = 12(1, 0, 0) + 5(0, 3, 10)$ und wir suchen ein Basis f_2, f_3 für $\{0\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ derart, dass $f_2 = (0, 3, 10)$ ist. Dabei ist $-3 \cdot 3 + 1 \cdot 10 = 1$, so wir setzen $c = -3, d = 1$ und können ein Zwischenbasis aufstellen

$$\begin{aligned}f_1 &= (1, 0, 0) \\ f_2 &= (0, -3, 10) \\ f_3 &= (0, -d, c) = (0, -1, -3)\end{aligned}$$

Nun ist $(12, 15, 50) = 12f_1 + 5f_2$ und $-2 \cdot 12 + 5 \cdot (-5) = 1$ und wir können setzen $c = -2, d = 5$. Dadurch wird unsere Basis

$$\begin{aligned}e_1 &= (12, 15, 50) \\ e_2 &= -df_1 + cf_2 = -5f_1 - 2f_2 = (-5, -6, -20) \\ e_3 &= (0, -1, -3)\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (4 P.) Sei F der freie $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ und $M \subseteq F$ der Untermodul, der von $(2, 3, 0)$, $(0, 1, 1)$ und $(3, 1, -1)$ erzeugt wird. Finden Sie eine Basis für F derart, dass bestimmte Vielfachheiten dieser Basis eine Basis von M sind.

Da der Inhalt von $(2, 3, 0)$ 1 ist, können wir $f_1 = (2, 3, 0)$ setzen. Eine Basis zu F mit $(2, 3, 0)$ als erstes Element erhalten wir als

$$\begin{aligned}f_1 &= (2, 3, 0) \\ f_2 &= (-1, -1, 0) \\ f_3 &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

und in dieser Basis ist

$$\begin{aligned} m_1 &:= (2,3,0) & m_1 &= f_1 \\ m_2 &:= (0,1,1) & m_2 &= f_1 + 2f_2 + f_3 \\ m_3 &:= (3,1,-1) & m_3 &= -2f_1 - 7e_2 - e_3 \end{aligned}$$

Also ist $f_1, 2f_2 + f_3, 7f_2 + f_3$ eine Basis für M. Dann ist auch $f_1, 2f_2 + f_3, 5f_2$ eine Basis für M. Wir können also eine Basis für F wählen mit

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 \\ e_2 &= 2f_2 + f_3 \\ e_3 &= f_2 \end{aligned}$$

die die Eigenschaft hat, dass $e_1, e_2, 5e_3$ eine Basis für M sind.