Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc.Mikael Johansson

Übungen zu Algebra 2

Sommersemester 2006 — Lösungen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Sei k ein Körper, sei R der Ring $M_n(k)$, und sei M der R-Modul k^n mit der üblichen Modulstruktur.

a) (3 P.) Sei $v \in M$ ein beliebiger Vektor $\neq 0$. Zeigen Sie, dass $Rv = M$ gilt, d.h. v erzeugt den Modul M.

Sei $v = (v_i) \neq 0$ in M. Dann existiert ein i so daß $v_i \neq 0$. Durch permutieren der Basis können wir erzeugen daß $i = 1$. Dann ist für $w = (w_i)$

$$\begin{pmatrix} w_1/v_1 & 0 & \dots & 0 \\ w_2/v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n/v_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} v = w \tag{1}$$

b) Nun sei $A \in R$ eine beliebige Matrix $\neq 0$. Sei $I = (A)$, das (doppelseitige) Ideal in R, das durch A erzeugt wird. Zeigen Sie: es ist $I = R$.

Sei $A = (a_{ij}) \neq 0$. Dann existieren k, l so daß $a_{kl} \neq 0$. Dann wird für $E_{rs} = (e_i j)$ die Matrix mit $e_{rs} = 1$ und $e_{ij} = 0$ sonst $\sum_{i=1}^n E_{ik} A E_{li} = \mathbb{1}$ und daher ist $I = R$.

Aufgabe 2: (4 P.) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sei $R = \mathbb{R}[X]$, und sei $M = \mathbb{R}^4$, ein R-Modul durch $p(X)v := p(A) \cdot v$. Bestimmen Sie möglichst alle Untermoduln von M.

Als erstes wird observiert, daß für $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ gilt $Av = (v_3, v_2 + v_4, -v_1, v_4)$. Aus dieses folgt daß die Aufteilung von $M = U_1 \oplus U_2$ mit $U_1 = \langle e_1, e_3 \rangle$ und $U_2 = \langle e_2, e_4 \rangle$ eine Aufteilung ist, die von dem Aktion von A unverändert sind. Also dekomposiert M als Modul in $M = U_1 \oplus U_2$. Ein Untermodul zu M wird daher aus jeweils ein Untermodul von den beidenen Teilmoduln bestimmt.

Weiterhin gilt daß ein Untermodul ein Unterraum ist, die unter die Aktion der Matrix geschlossen ist — denn die Skalarmultiplikation wird durch den konstanten Polynome gegeben.

Ist ein Vektor $v = (v_1, 0, v_3, 0) \in N \subseteq U_1$, dann ist auch $v_3 Av + v_1 v = (v_1^2 + v_3^2, 0, 0, 0) \in N$. Wenn, daher, $v \neq 0$ in N, liegt, dann liegt auch $\frac{1}{v_1^2 + v_3^2} v_3 Av + v_1 v = e_1 \in N$. Schliesslich, wenn $e_1 \in N$, dann ist auch $-Ae_1 = e_3 \in N$. Also sind die einzige Untermoduln von U_1 genau $\emptyset$ und U_1.

Ist ein Vektor $v = (0, v_2, 0, v_4) \in N \subseteq U_2$, dann ist auch $Av - v = (0, v_4, 0, 0) \in N$. Daraus folgt, daß wenn $v \neq 0$, dann entweder $v_4 \neq 0$ und daher $e_2 \in N$, oder $v_4 = 0$ und dann auch sofort $e_2 \in N$. Jedoch ist $A(0, v_2, 0, 0) = (0, v_2, 0, 0)$, so U_2 hat den Untermoduln $\emptyset$, $\langle e_2 \rangle$ und U_2.

Das ergibt die Untermoduln $\emptyset$, U_1, $\langle e_2\rangle$, $U_1 + \langle e_2\rangle$, U_2 und M. Weitere Untermoduln gibt es nicht, denn durch die obere herleitungen wurde so eine Untermodul Basisvektoren enthalten, die es isomorph zu einer diese Möglichkeiten darstellen wurde.

Aufgabe 3: (2 P.) Angenommen, M ist ein R-Modul und es gibt $0 \neq r \in R$ und $0 \neq m \in M$ mit $rm = 0$. Zeigen Sie: r hat kein Linksinverses, d.h. es gibt kein $s \in R$ mit $sr = 1$.

Wenn es ein Linksinverses geben wurde, dann wäre $m = 1 \cdot m = (sr)m = s(rm) = s \cdot 0 = 0$. Wiederspruch.

Aufgabe 4: (3 P.) Sei R ein Kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die R-Moduln $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ und M isomorph sind.

Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$. Dann ist $f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1)$, und f ist eindeutig bestimmt durch $f(1)$. Dies ergibt eine wohldefinierte Modulhomomorphismus $\psi \colon \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M$ durch $f \mapsto f(1)$. Die Inverses davon wird gegeben durch $\psi^{-1}(m) = (r \mapsto rm)$. Verifikation von wohldefiniertheit ist einfach, und $\psi \circ \psi^{-1}(m) = \psi(r \mapsto rm) = 1m = m$ und $\psi^{-1} \circ \psi(f) = \psi^{-1}(f(1)) = (r \mapsto rf(1)) = (r \mapsto f(r))$ shows that ψ^{-1} is a twosided inverse of ψ.

Aufgabe 5: Sei R ein Ring $\neq 0$ und M ein R-Modul. Ein Element $m \in M$ heißt ein Torsionselement, wenn es ein $0 \neq r \in R$ gibt derart, dass $rm = 0$ ist. Man setzt

$$\mathrm{Tor}(M) := \{m \in M \mid m \text{ ein Torsionselement}\}$$

a) (4 P.) Ist R ein Integritätsbereich, so ist $\mathrm{Tor}(M)$ ein Untermodul von M.

   Sind $m, m' \in M$ mit $rm = 0$ und $r'm' = 0$, dann ist $(rr')(m - m') = rr'm - rr'm' = r'(rm) - r(r'm') = 0 - 0 = 0$ mit $rr' \neq 0$, und daher ist $\mathrm{Tor}(M)$ eine abelsche Untergruppe von M. Weiterhin, ist $s \in R$, dann ist $r(sm) = s(rm) = s0 = 0$, und daher ist $R\,\mathrm{Tor}(M) \subseteq M$. Also ist $\mathrm{Tor}(M)$ ein Untermodul.

b) Finden Sie ein Beispiel, wo $\mathrm{Tor}(M)$ kein Untermodul von M ist.

   i) Ist $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, dann ist $2, 3 \in \mathrm{Tor}(R)$ aber $2 + 3 = 5 \notin \mathrm{Tor}(R)$.

   ii) Ist $R = \mathbb{C}[x, y]/\langle xy\rangle$, dann ist $x, y \in \mathrm{Tor}(R)$, aber für jede $p \in R$ mit $p = p_x + p_y$ die Aufteilung in reine x und y-Glieder, ist $p(x + y) = xp_x + yp_y$, und daher ist $(x + y) \notin \mathrm{Tor}(R)$.

   iii) Ist $R = C(\mathbb{R})$, die Ring der stetigen Funktionen mit Ringoperationen punktweis definiert, dann sind die Torsionselemente genau Funktionen die auf irgendein Intervall null sind. Zwei Funktionen mit disjunkte Null-intervalle und nicht-negativen Bild haben eine Summe, die überall positiv ist; daher ist die einzige Funktion in R die diese Summe vernichtet die Nullfunktion.