Zum Ring der monomialen Darstellungen einer endlichen Gruppe

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Mathematiker
an der

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von : Bosco Fotsing

geboren am : 10.09.1971 in Bamougoum (Kamerun)

Betreuer : Prof. Dr. Burkhard Külshammer

Jena, 19. Dezember 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Darstellungstheorie ist eines der wichtigsten Werkzeuge, um Resultate aus der Theorie der Gruppen endlicher Ordnung nachzuweisen. Der Satz von Burnside, nach dem jede endliche Gruppe der Ordnung $p^a q^b$, wobei p, q Primzahlen und a, b natürliche Zahlen sind, auflösbar ist, lässt sich leicht in wenigen Zeilen mit Hilfe der Darstellungstheorie nachweisen (siehe z.B. [**1**, Seite 182]). Aber ein direkter gruppentheoretischer Beweis ist lang und schwieriger (siehe z.B. [**7**, Seiten 204-215]) und bringt weniger Informationen als der Originalbeweis von Burnside. Der Ring der monomialen Darstellungen, der uns in dieser Arbeit beschäftigen wird, gehört zur Klasse der sogenannten **Darstellungsringe**. Im ersten Kapitel führen wir einige algebraische Begriffe ein, die uns später in unseren Konstruktionen helfen werden. Ausgehend von einer endlichen Gruppe G werden wir einen kommutativen Ring $D(G)$ konstruieren. Das Prädikat „D“ wird sich als ein (kontravarianter) Funktor von der Kategorie $\mathcal{EG}r$ der endlichen Gruppen in die Kategorie $\mathcal{R}ing$ der kommutativen Ringe herausstellen. Im zweiten Kapitel wird die Ringstruktur von $D(G)$ bestimmt. Wir werden zunächst eine Definition von $D(G)$ und eine Charakterisierung angeben. Dann werden wir viele verschiedene Operationen einführen, die für Rechnungen in $D(G)$ nützlich sind. Damit werden wir in der Lage sein, klassische Formeln der Darstellungstheorie für den Ring $D(G)$ nachweisen zu können. Wenn man einen Ring studieren will, stellen sich natürlich Fragen wie: Welche Teilmengen sind (Prim-)Ideale? Wie sehen die Idempotente aus? usw. Mit Hilfe von verschiedenen Techniken werden wir das Primspektrum und die (primitiven) Idempotente der Monomialalgebra $\mathbb{Z}[\zeta] \bigotimes_{\mathbb{Z}} D(G)$ berechnen, wobei ζ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel ist.

Wir werden auch die Algebra $D_R(G) = R \bigotimes_{\mathbb{Z}} D(G)$, wobei R ein geeignet ausgewählter Ring ist, betrachten. Dazu werden wir Eigenschaften wie Halbeinfachheit und Geschlossenheit überprüfen. Zum Schluss werden wir eine Charakterisierung der endlichen auflösbaren Gruppen mit Hilfe von $D(G)$ beweisen. Dies zeigt eindrucksvoll die Wichtigkeit von $D(G)$ in der Gruppentheorie.

Bedanken möchte ich mich abschließend bei der Friedrich-Ebert-Stiftung, die seit November 2002 durch ein Stipendium eine reguläre Beendigung meines Studiums möglich macht, bei Herrn J. Wollbold für seine Ermutigung, immer wieder entstehende bürokratische Hindernisse zu überwinden, sowie für Hinweise zur sprachlichen Formulierung der Arbeit, und natürlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Burkhard Külshammer für seine Unterstützung und viele wertvolle Stunden, die er für mich geopfert hat.

Kapitel 1

Allgemeine algebraische Vorbereitungen

Zur Definition des Rings der monomialen Darstellungen benötigen wir einige kategorientheoretische, modultheoretische sowie gruppentheoretische Vorbereitungen. Die Sprache der Kategorientheorie ist ein äußerst nützliches Mittel, um Darstellungsringe (wie etwa den Grothendieck-Ring, Green-Ring,...) einer endlichen Gruppe zu konstruieren.

1.1 Darstellungen

Falls es nicht ausdrücklich gesagt wird, soll in Zukunft unter einer Gruppe stets eine endliche Gruppe verstanden werden. Wir weisen noch darauf hin, dass viele der folgenden Aussagen auch für beliebige Gruppen gelten. Gegeben sei ein Vektorraum V endlicher Dimension n über einem Körper K, mit einer natürlichen Zahl n.

Definition 1.1.1 *Eine lineare Darstellung von G über K, oder einfach eine K-Darstellung von G, ist ein Homomorphismus ρ von G in die Gruppe $GL_K(V)$ der invertierbaren Endomorphismen von V. n heißt der Grad der Darstellung ρ.*

Die wichtigsten Beispiele sind die komplexen Darstellungen von G, also mit $K = \mathbb{C}$, dem Körper der komplexen Zahlen. Darstellungen ρ, λ von G auf den K-Vektorräumen V, W nennen wir *ähnlich*, falls eine lineare Bijektion $f : V \to W$ existiert mit $f \circ \rho(g) = \lambda(g) \circ f$ für alle $g \in G$. Die Darstellung $\rho : G \to GL_K(V)$ nennen wir *treu*, falls Ker(ρ)=1.

Eine Menge S heißt eine (Links-)G-Menge, falls es eine Abbildung

$$t : G \times S \longrightarrow S, \quad (g, s) \longmapsto gs := t(g, s)$$

mit $g(hs) = (gh)s$, $1s = s$ für alle $g, h \in G$, $s \in S$ gibt. Die Abbildung t heißt also eine (Links-)Operation von G auf S. Nun möchten wir einige wichtige Eigenschaften von Darstellungen erläutern. Zunächst noch eine Definition.

Definition 1.1.2 *Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K und G eine Gruppe. Eine K-lineare Operation von G auf V ist eine Operation von G auf V mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $g(u + v) = gu + gv$ *für alle* $u, v \in V$ *und alle* $g \in G$,

(ii) $g(kv) = k(gv)$ *für alle* $v \in V$, *alle* $k \in K$ *und alle* $g \in G$.

Damit erhalten wir:

Satz 1.1.3 *Es seien K ein Körper und G eine Gruppe. Dann gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen der Menge der K-linearen Operationen von G auf einem K-Vektorraum V und der Menge der Gruppenmorphismen von G in $GL_K(V)$.*

Beweis: Es sei $\rho : G \longrightarrow GL_K(V)$ ein Gruppenmorphismus. Dann ist $gv := \rho(g)(v)$ trivialerweise eine K-lineare Operation von G auf V. Es sei umgekehrt eine lineare Operation von G auf V gegeben. Dann definiert

$$\varphi : G \longrightarrow GL_K(V); \quad g \longmapsto (v \longmapsto gv)$$

trivialerweise einen Gruppenmorphismus. Damit ist der Satz bewiesen. □

Es gibt also eine bijektive Zuordnung zwischen K-linearen Operationen von G auf einem K-Vektorraum V und linearen K-Darstellungen von G. Wie der folgende Satz zeigt, gibt es auch eine enge Beziehung zwischen Moduln über der Gruppenalgebra und Darstellungen.

Satz 1.1.4 *Es seien K ein Körper und G eine Gruppe. Dann gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen der Menge der K-linearen Operationen von G auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum und endlich erzeugten KG-Moduln.*

Beweis: Es seien V ein endlich erzeugter KG-Modul und $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ein Erzeugendensystem von V. Dann ist V als K-Vektorraum von $\{gv_i | \ g \in G, i = 1, \ldots, k\}$ erzeugt. Da G endlich ist, ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Und die Operation $G \times V \longrightarrow V$, die Einschränkung der Modulstruktur $KG \times V \longrightarrow V$, ist offenbar K-linear. Es sei umgekehrt V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Angenommen, es gibt eine lineare Operation von G auf V. Dann erhält V eine KG-Modulstruktur durch die Operation $(\sum_{g \in G} k_g g)v := \sum_{g \in G} k_g(gv)$ für $\sum_{g \in G} k_g g \in KG$ und $v \in V$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Mit $\mathcal{M}od_{KG}$ bezeichnen wir die Kategorie der KG-Moduln und Morphismen von KG-Moduln.

Es sei M ein Modul über einem Ring R. Dann heißt er *einfach*, falls er nicht der Nullmodul ist und nur triviale Untermoduln (d.h. 0 und M) besitzt, und *halbeinfach*, falls er der Nullmodul ist oder sich als direkte Summe von einfachen Untermoduln darstellen lässt. Der nächste Satz ist ein grundlegender Satz der (nichtmodularen) Darstellungstheorie. Hier ist eine von mehreren möglichen Formulierungen. Der Beweis ist in fast jedem Buch über Darstellungstheorie zu finden.

Satz 1.1.5 (Maschke) *Es seien G eine endliche Gruppe und K ein Körper der Charakteristik p, $p = 0$ zugelassen. Ist $p \nmid |G|$, so ist jeder KG-Modul halbeinfach.*

Die Umkehrung des obigen Satzes gilt auch. Dies werden wir im nächsten Kapitel auf monomiale Algebren übertragen (siehe Satz 2.3.8). Analoge Sätze gelten unter geeigneten Bedingungen für zahlreiche Darstellungsringe. Für die Burnside-Algebra siehe z.B. [**13**, Chapter 15, Corollary 3.7].

Es seien $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ eine Basis von V und $f \in GL_K(V)$. Dann besitzt f eine Matrix $M \in GL(n, K)$ bezüglich der Basis B. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass $GL_K(V)$ zu der Gruppe $GL(n, K)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K isomorph ist. Also gibt es für $x \in G$ eine Matrix $\rho^*(x)$, die $\rho(x)$ darstellt. Die Abbildung ρ^*

von G in $GL(n,K)$ bezeichnet die zu ρ gehörige Matrix-Darstellung in der Basis B. Die Abbildung $\vartheta : G \to K; \quad g \mapsto \mathrm{Spur}(\rho^*(g))$ heißt der **Charakter** der Darstellung ρ. Er heißt *treu*, falls ρ diese Eigenschaft besitzt. Es ist auch leicht zu sehen, dass ähnliche Darstellungen den gleichen Charakter haben. Also sind die Darstellungen bis auf Ähnlichkeit durch die Charaktere bestimmt. Der Charakter einer linearen K-Darstellung vom Grad 1 heißt linearer Charakter von G. Also sind lineare Charaktere von G einfach Homomorphismen von G in $K^\times = K \setminus \{0\}$. Die wichtigsten Eigenschaften von Charakteren endlicher Gruppen setzen wir hier als bekannt voraus (siehe z.B. [**10**]).

Besonders interessant sind die Permutationsdarstellungen, also diejenigen deren zugehörige Matrizen Permutationsmatrizen darstellen. Wir erinnern daran, dass eine Matrix $A \in GL(n,K)$ Permutationsmatrix heißt, wenn jede Spalte und jede Zeile von A genau eine 1 enthält, sonst Nullen. Diesen Begriff möchten wir nun verallgemeinern. Deshalb führen wir jetzt den Begriff der monomialen Darstellung ein.

1.2 Monomiale Darstellungen

Definition 1.2.1

(i) Eine Matrix $A \in GL(n,K)$ heißt monomial, falls in jeder Zeile und jeder Spalte von A genau ein von Null verschiedener Koeffizient steht.

(ii) Eine Matrix-Darstellung $\rho : G \longrightarrow GL(n,K)$ von G heißt monomial, falls $\rho(g)$ für jedes $g \in G$ eine monomiale Matrix ist. Der zugehörige Charakter heißt monomialer Charakter.

*(iii) Eine **monomiale Darstellung** von G ist eine lineare Darstellung von G, die eine monomiale Matrix-Darstellung besitzt.*

Monomiale Darstellungen sind also eine natürliche Verallgemeinerung von Permutationsdarstellungen. G heißt eine **M-Gruppe**, wenn für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik p mit $p \nmid |G|$ sämtliche K-Darstellungen von G monomial sind. Nach dem Satz von Maschke ist G genau dann eine **M-Gruppe**, wenn die Menge $\mathrm{Irr}(G)$ der irreduziblen Charaktere von G über K nur aus monomialen Charakteren besteht. M-Gruppen sind immer auflösbar (nach K. Taketa). Die Umkehrung dieser Aussage gilt i.A. nicht. Sie ist jedoch wahr, wenn G einen Normalteiler N mit lauter abelschen Sylowuntergruppen besitzt, so dass die Faktorgruppe G/N überauflösbar ist (B. Huppert). E. C. Dade hat auch bewiesen, dass jede auflösbare Gruppe isomorph zu einer Untergruppe einer bestimmten M-Gruppe ist (siehe [**9**, Kapitel 5, Satz 18.11]). Es gibt zahlreiche interessante Ergebnisse in dieser Richtung, aber wir möchten sie nicht weiter verfolgen. Siehe etwa [**9**, Kapitel 5, Abschnitt 18].

Es sei $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ eine Zerlegung von V in Geraden, d.h. eindimensionale Untervektorräume von V. Dabei wird für alle i mit $1 \leq i \leq n$ der Untervektorraum V_i von $v_i \in B$ (Basis von V) erzeugt. Dann ist eine monomiale Darstellung von G auf V eine K-lineare (Links)-Operation von G auf V, die die Elemente der Menge $M = \{V_1, \ldots, V_n\}$ permutiert. Mit anderen Worten, für $g \in G$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $gV_i = V_j$. Es gibt also eine Permutation σ_g von $\{1, \ldots, n\}$, die von g abhängt, mit $\sigma_g(i) = j$. Wir gehen jetzt zur Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ über. Aus $g \in G$ und $gV_i = V_j$ folgt $gv_i = \lambda_i(g)v_j$ mit $\lambda_i(g) \in K^\times$. Die Funktionen $\lambda_i : G \longrightarrow K^\times$ heißen **Multiplikatoren** der gegebenen monomialen Darstellung (hier mit ρ bezeichnet). Es sei P_{σ_g} die Permutationsmatrix von σ_g und ρ^* die Matrix-Darstellung von ρ. Dann gilt $\rho^*(g) = P_{\sigma_g} \cdot \mathrm{Diag}(\lambda_1(g), \ldots, \lambda_n(g))$. Es ist wichtig zu beachten, dass alle monomialen Matrizen von der Form $P \cdot D$ sind, mit einer Permutationsmatrix P und einer invertierbaren Diagonalmatrix D. Sie bilden eine Gruppe, die wir mit $GM(n, K)$ bezeichnen werden. Offenbar gilt $\Sigma_n \cap D(n, K) = \{1\}$. Ferner gilt (siehe [**1**, S. 48]) $GM(n, K) = N_{GL(n,K)}(D(n, K))$. Also ist $D(n, K) \trianglelefteq GM(n, K)$. Daher ist $GM(n, K) = \Sigma_n \ltimes D(n, K)$, das semidirekte Produkt der Gruppe Σ_n aller $n \times n$-Permutationsmatrizen und der Gruppe $D(n, K)$ aller invertierbaren $n \times n$-Diagonalmatrizen. Eine monomiale Darstellung von G über K kann man also auch definieren als Homomorphismus von G in die Gruppe $GM(n, K)$ aller $n \times n$-Monomialmatrizen mit Koeffizienten in K. Wir führen nun den zentralen Begriff des monomialen Objekts ein.

Definition 1.2.2 *Ein* ***monomiales Objekt*** *der Gruppe G ist ein Paar $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$, das aus einem KG-Modul V und einer Zerlegung $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ in eindimensionale Unterverktorräume $V_1, \ldots, V_n$ besteht, die unter der Operation von G permutiert werden.*

Ein monomiales Objekt $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ von G heißt *einfach*, falls die Operation von G auf der Geradenmenge $\{V_1, \ldots, V_n\}$ von V transitiv ist. Nach Satz 1.1.4 werden wir oft die monomialen Objekte von G mit den zugehörigen Vektorräumen identifizieren.

Bemerkung 1.2.3 Gegeben sei ein monomiales Objekt $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ von G. Zerlegt man die Geradenmenge $\{V_1, \cdots, V_n\}$ in G-Bahnen, so erhält man eine eindeutig bestimmte Zerlegung von $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ in einfache monomiale Objekte von G.

Definition 1.2.4 *Es seien $(V, \{V_1, \cdots, V_n\})$ und $(W, \{W_1, \cdots, W_k\})$ zwei monomiale Objekte von G. Ein Morphismus von monomialen Objekten von $(V, \{V_1, \cdots, V_n\})$ in $(W, \{W_1, \cdots, W_k\})$ ist eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $f(av + bw) = af(v) + bf(w)$ für alle $a, b \in K$ und $v, w \in V$,

(b) $f(gv) = gf(v)$ für alle $g \in G$ und $v \in V$,

(c) Für jedes $i \in \{1, \cdots, n\}$ gibt es ein $j \in \{1, \cdots, k\}$ mit $f(V_i) \subseteq W_j$.

Ein *Isomorphismus* von monomialen Objekten ist ein bijektiver Morphismus von monomialen Objekten. Es ist hier zu beachten, dass die gewöhnlichen Morphismen von K-Vektorräumen sich deutlich von den Morphismen von monomialen Objekten durch die Bedingungen b) und c) der obigen Definition unterscheiden. Also der Fakt, dass wir die monomialen Objekte mit den zugehörigen Vektorräumen identifizieren, ist im erweiterten Sinn zu verstehen.

Man prüft leicht nach, dass die monomialen Objekte der Gruppe G und die Morphismen von monomialen Objekten eine Kategorie bilden. Diese heißt die **monomiale Kategorie** von G und wird mit $\mathcal{M}on_{KG}$ bezeichnet. Im folgenden Abschnitt führen wir den Begriff der Induktion ein.

1.3 Induktion

Es seien H eine Untergruppe von G und V ein KH-Linksmodul. Weiter sei

$$G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} g_i H$$

die Partition von G in Linksnebenklassen nach H. Da die Elemente von G eine Basis des K-Vektorraums KG bilden, haben wir die folgende Zerlegung:

$$KG = \bigoplus_{i=1}^{k} g_i KH$$

von KG in eine direkte Summe von KH-Rechtsmoduln. Wir bezeichnen mit $[G/H]$ ein vollständiges Repräsentantensytem von Linksnebenklassen von G nach H. Da KG auch ein KG-Linksmodul ist, betrachten wir KG als (KG, KH)-Bimodul. Daraus folgt, dass das Tensorprodukt

$$KG \otimes_{KH} V$$

ein KG-Linksmodul ist. Er heißt der von H nach G **induzierte Modul** von V und wird mit V^G oder auch $\mathrm{Ind}_H^G V$ bezeichnet. Aus dieser Definition erhalten wir unmittelbar

$$V^G = KG \otimes_{KH} V = (\bigoplus_{g\in[G/H]} gKH) \otimes_{KH} V = \bigoplus_{g\in[G/H]} (gKH \otimes_{KH} V) = \bigoplus_{g\in[G/H]} (g \otimes V),$$

wobei $g \otimes V = \{g \otimes v |\ v \in V\}$ ist. Da $g \otimes V$ und V isomorphe K-Vektorräume sind, gilt

$$\mathrm{Dim}_K(V^G) = |G : H| \cdot \mathrm{Dim}_K(V).$$

G operiert von links auf V^G wie folgt: Ist $\{g_1, \ldots, g_k\} = [G/H]$, so gibt es für jedes Element $x \in G$ ein eindeutig bestimmtes Element $h_i \in H$, so dass $xg_i = g_{\pi(i)}h_i$ für eine Permutation $\pi \in \Sigma_k$ der Symmetrischen Gruppe von $\{1, \ldots, k\}$. Daraus folgt für alle $v \in V$ und $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$x(g_i \otimes v) = xg_i \otimes v = g_{\pi(i)}h_i \otimes v = g_{\pi(i)} \otimes h_i v.$$

Insbesondere permutiert das Element $x \in G$ (durch $\pi \in \Sigma_k$) die Unterräume $g_i \otimes V$ von V^G genauso wie die Linksnebenklassen von G nach H.

Aus der Definition folgt unmittelbar:

Satz 1.3.1 *Es seien H eine Untergruppe von G, V und W zwei KH-Moduln. Dann gilt*

$$(V \oplus W)^G \cong V^G \oplus W^G.$$

Es seien $(U, \{U_1, \ldots, U_m\})$ und $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ zwei monomiale Objekte von G. Dann definieren wir die direkte Summe (bzw. das Tensorprodukt) von $(U, \{U_1, \ldots, U_m\})$ und $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ als direkte Summe (bzw. Tensorprodukt) der K-Vektorräume U und V, versehen mit der Zerlegung $U \oplus V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ (bzw. $U \otimes_K V = \bigoplus_{i,j}(U_i \otimes V_j)$) und der offensichtlichen (bzw. diagonalen) Operation von G. Offenbar sind das Tensorprodukt und die direkte Summe von $(U, \{U_1, \ldots, U_m\})$ und $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ wiederum monomiale Objekte von G. Wie wir im vorangehenden Abschnitt schon erwähnt haben, wird im folgenden ein monomiales Objekt $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ auch manchmal einfach mit dem Vektorraum V identifiziert.

Für drei monomiale Objekte U, V und W von G gelten folgende kanonische Isomorphismen von monomialen Objekten von G:

$$\begin{array}{ll} (a) & U \oplus V \cong V \oplus U, \quad U \otimes V \cong V \otimes U, \quad U \otimes K \cong U, \\ (b) & U \oplus (V \oplus W) \cong (U \oplus V) \oplus W, \quad U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W, \\ (c) & (U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W). \end{array}$$

Es sei H eine Untergruppe von G und $(V, \{V_1, \ldots, V_m\})$ ein monomiales Objekt von H. Dann definieren wir die *Induktion* von H nach G als K-Vektorraum

$$KG \otimes_{KH} V$$

versehen mit der Zerlegung in die Geradenmenge $\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{g \in [G/H]} g \otimes V_i$ und der obenstehenden Operation von G. Diese wird auch mit $\mathrm{Ind}_H^G V$ oder V^G bezeichnet. Damit erhalten wir einen (kovarianten) Funktor

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}_H^G : \mathcal{M}on_{KH} \longrightarrow \mathcal{M}on_{KG} \\ &(V, \{V_1, \ldots, V_m\}) \mapsto (KG \otimes_{KH} V, \{g \otimes V_i | \, g \in [G/H], i = 1, \ldots, m\}) \\ &f \mapsto \mathrm{Id}_{KG} \otimes f, \end{aligned}$$

für alle Morphismen f von monomialen Objekten von H. Damit gilt (in $\mathcal{M}od_{KG}$ und in $\mathcal{M}on_{KG}$):

Satz 1.3.2 *Es seien H und S zwei Untergruppen von G mit $H \leqslant S \leqslant G$, und V ein KH-Modul. Dann gilt*

(a) $KG \otimes_{KH} KH \cong KG$ und $K^G \cong KG$,

(b) $(V^S)^G \cong V^G$.

Beweis: Der erste Teil von (a) ist eine triviale Eigenschaft des Tensorprodukts von Moduln. Der zweite Teil folgt aus: $K\{1\} \cong K$, wobei $\{1\}$ die triviale Untergruppe von G bezeichnet.
Zu (b): Es sei $(V, \{V_1, \ldots, V_m\})$ ein monomiales Objekt von H. Dann gilt:

$$(V^S)^G = KG \otimes_{KS} KS \otimes_{KH} V = \bigoplus_{x \in [G/S]} \bigoplus_{y \in [S/H]} \bigoplus_{i=1}^{m} x \otimes y \otimes V_i.$$

Ferner bildet $\{xy | \, x \in [G/S], \; y \in [S/H]\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von Linksnebenklassen von G nach H. Es sei $f : (V^S)^G \to V^G; \quad x \otimes y \otimes v \mapsto xy \otimes v$ der kanonische Isomorphismus von KG-Moduln. Dann ist $f(x \otimes y \otimes V_i) = xy \otimes V_i$. Daher ist f auch ein Isomorphismus von monomialen Objekten von G. □

Es seien W ein KG-Modul und H eine Untergruppe von G. Dann ist W ein KH-Modul. W betrachtet als KH-Modul heißt die **Restriktion** oder auch **Einschränkung** von W auf H und wird mit W_H oder $\mathrm{Res}_H^G W$ bezeichnet. Ferner sei $(V, \{V_1, \ldots, V_k\})$ ein monomiales Objekt von G. Dann ist die Restriktion von $(V, \{V_1, \ldots, V_k\})$ auf H definiert als $(V, \{V_1, \ldots, V_k\})$ versehen mit der Einschränkung der Operation von G auf Elemente von H. Diese wird auch wie oben bezeichnet.

Für zwei Untergruppen S und H von G mit $S \leqslant H \leqslant G$ und einen KG-Modul V gilt die Transitivität der Restriktion: $(V_H)_S = V_S$. Dies gilt auch für monomiale Objekte.

Die Restriktion, die direkte Summe und das Tensorprodukt von monomialen Darstellungen induzieren auch Funktoren mit den offensichtlichen Definitionen auf Morphismen von monomialen Objekten.

Den Isomorphismus des folgenden Satzes werden wir später auf den Ring der monomialen Objekte von G übertragen (siehe Satz 2.3.6). Er ist auch eine modultheoretische Übetragung einer von Frobenius stammenden Formel über Charaktere (siehe [**12**, Satz 6.2(ii), Seite 23]).

Satz 1.3.3 *Es seien H eine Untergruppe von G, V ein (monomialer) KH-Modul und W ein (monomialer) KG-Modul. Dann gilt:*

$$V^G \otimes_K W \cong (V \otimes_K W_H)^G.$$

Beweis: Nach Definition gilt

$$V^G \otimes_K W = (KG \otimes_{KH} V) \otimes_K W; \quad (V \otimes_K W_H)^G = KG \otimes_{KH} (V \otimes_K W_H).$$

Wir setzen $[G/H] := \{g_1, \dots, g_n\}$. Es sei φ die Abbildung

$$\varphi : V^G \otimes_K W \to (V \otimes_K W_H)^G; \quad (g_i \otimes v) \otimes w \mapsto g_i \otimes (v \otimes g_i^{-1} w).$$

Dann ist φ offenbar ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. Es sei $g \in G$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $h_i =: h \in H$ und ein $\pi \in \Sigma_n$ mit $\pi(i) = j$ und $gg_i = g_j h$. Also gilt

$$\begin{aligned} g\varphi((g_i \otimes v) \otimes w) &= g(g_i \otimes (v \otimes g_i^{-1} w)) \\ &= g_j \otimes h(v \otimes g_i^{-1} w) \\ &= g_j \otimes (hv \otimes hg_i^{-1} w) \\ &= g_j \otimes (hv \otimes g_j^{-1} gw). \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned} \varphi(g((g_i \otimes v) \otimes w)) &= \varphi((gg_i \otimes v) \otimes gw) \\ &= \varphi((g_j \otimes hv) \otimes g_j h g_i^{-1} w) \\ &= g_j \otimes (hv \otimes g_j^{-1} g_j h g_i^{-1} w) \\ &= g_j \otimes (hv \otimes hg_i^{-1} gw) \\ &= g_j \otimes (hv \otimes g_j^{-1} gw) \\ &= g\varphi((g_i \otimes v) \otimes w). \end{aligned}$$

Daher ist φ ein Isomorphismus von KG-Moduln.

Es seien nun $(V, \{V_1, \dots, V_k\})$ ein monomiales Objekt von H und $(W, \{W_1, \dots, W_m\})$ ein monomiales Objekt von G. Dann gilt

$$\begin{aligned} V^G \otimes_K W &= \bigoplus_{x \in [G/H]} \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=1}^{m} (x \otimes V_i) \otimes W_j, \\ (V \otimes_K W_H)^G &= \bigoplus_{x \in [G/H]} \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=1}^{m} x \otimes (V_i \otimes W_j). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\varphi((x \otimes V_i) \otimes W_j) = x \otimes (V_i \otimes W_j)$. Daher ist φ auch ein Isomorphismus von monomialen Objekten von G. Damit ist der Satz bewiesen. □

Ferner haben wir folgende Isomorphismen von K-Vektorräumen:

Satz 1.3.4 (Nakayamas Reziprozitätssätze) *Es seien H eine Untergruppe von G, V ein KH-Modul und W ein KG-Modul. Dann gelten folgende Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

(i) $\mathrm{Hom}_{KG}(V^G, W) \cong \mathrm{Hom}_{KH}(V, W_H)$,

(ii) $\mathrm{Hom}_{KG}(W, V^G) \cong \mathrm{Hom}_{KH}(W_H, V)$.

Beweis: Siehe [**7**, Theorems 6.5 und 6.8, Seiten 131-134]. □

Nach Definition 1.2.4 (c) ist die Summe zweier Morphismen von monomialen Objekten nicht notwendigerweise ein Morphismus von monomialen Objekten. Wie wir später sehen werden (siehe Bemerkung 2.3.3), gilt Satz 1.3.4(ii) nicht für monomiale Objekte. Für ein monomiales Objekt V von H und ein monomiales Objekt W von G gibt es jedoch folgende bijektive Zuordnung zwischen den Mengen $\mathrm{Hom}(V^G, W)$ und $\mathrm{Hom}(V, W_H)$)

$$\mathrm{Hom}(V, W_H) \to \mathrm{Hom}(V^G, W); \quad f \mapsto (g \otimes v \mapsto gf(v)), \quad g \in G,$$

wobei $\mathrm{Hom}(V^G, W)$ die Menge der Morphismen von monomialen Objekten von V^G in W ist. Ferner ist die Multiplikation mit einem Skalar in beiden Mengen erlaubt. Daher stellt sich Satz 2.3.2 als eine Übertragung von Satz 1.3.4(i) dar. Satz 1.3.4(i) nennt man manchmal auch Frobeniusschen Reziprozitätssatz.

Definition 1.3.5 *Es sei V ein KG-Modul. Der K-Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, K) = V^*$ ist durch die (Links-)Operation $(gh)(v) = h(g^{-1}v)$ für alle $v \in V$, $h \in V^*$ und $g \in G$ ein KG-Linksmodul. Als solcher heißt V^* der Dualmodul von V.*

Es sei $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ ein monomiales Objekt von G. Dann definieren wir das *duale* Objekt von $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ als $\mathrm{Hom}_K(V, K)$, versehen mit der Zerlegung $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_K(V_i, K)$ und der obenstehenden Operation von G. Es ist wiederum ein monomiales Objekt von G. Damit erhalten wir folgende kanonische Isomorphismen (in $\mathcal{M}od_{KG}$ und in $\mathcal{M}on_{KG}$):

Satz 1.3.6 *Es seien V und W KG-Moduln. Dann gelten folgende Isomorphismen von KG-Moduln*

(i) $(V \oplus W)^* \cong V^* \oplus W^*$,

(ii) $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$.

Der Punkt (ii) des folgenden Satzes bleibt richtig in der Kategorie $\mathcal{M}on_{KG}$.

Satz 1.3.7 *Es seien H eine Untergruppe von G, V und W KG-Moduln und T ein KH-Modul. Dann gilt*

(i) $\mathrm{Hom}_{KG}(V, W) \cong \mathrm{Hom}_{KG}(W^*, V^*)$ *(als K-Vektorräume),*

(ii) $(T^*)^G \cong (T^G)^*$ *(als KG-Moduln).*

Beweis: Zu (i): Siehe [**7**, Lemma 6.7, Seiten 132-133] für KG- und KH-Moduln.
Zu (ii): Es seien $[G/H] = \{g_1, \ldots, g_n\}$ und ψ die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : & (T^*)^G \longrightarrow (T^G)^* \\ & \sum_{i=1}^n g_i \otimes f_i \longmapsto (\sum_{j=1}^n g_j \otimes u_j \longmapsto \sum_{i=1}^n f_i(u_i)),\ u_i \in T, f_i \in T^*. \end{aligned}$$

Dann ist ψ wegen [**7**, Lemma 6.7(b) S. 132] ein Isomorphismus von KG-Moduln. Ferner sei $(T, \{T_1, \ldots, T_u\})$ ein monomiales Objekt von H. Dann ist

$$\begin{aligned} (T^*)^G &= \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^u g_i \otimes T_j^*, \\ (T^G)^* &= \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^u (g_i \otimes T_j)^*. \end{aligned}$$

Ferner gilt $\psi(g_i \otimes T_j^*) = (g_i \otimes T_j)^*$. Daher ist ψ ein Isomorphismus von monomialen Objekten von G. $\square$

Es ist schließlich zu beachten, dass $\mathcal{M}on_{KG}$ im Gegensatz zu $\mathcal{M}od_{KG}$ keine abelsche Kategorie ist. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist sehr wichtig zu beachten, dass monomiale Darstellungen von G sich deutlich von monomialen Objekten von G unterscheiden.

Beispiel 1.3.8 Wir setzen $K = \mathbb{C}$. Es sei

$$G = \langle a, b |\ a^4 = 1, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

die Quaternionengruppe der Ordnung 8. Die Elemente von G lassen sich auch mit Hilfe von folgenden Matrizen

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ab = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

von $GL(2, \mathbb{C})$ darstellen. Dann besitzt G genau drei Untergruppen der Ordnung 4, nämlich $H_1 = \langle a \rangle$, $H_2 = \langle b \rangle$ und $H_3 = \langle ab \rangle$. Für jedes $j = 1, 2, 3$ wählen wir einen treuen linearen Charakter

$$\varphi_j : H_j \longrightarrow \mathbb{C}^\times; \quad x_j \longmapsto i,$$

wobei $x_1 = a$, $x_2 = b$ und $x_3 = ab$ für $j = 1, 2, 3$ ist.

Ferner sei $\mathbb{C}_{\varphi_j}$ der $\mathbb{C}H_j$-Modul $\mathbb{C}$ versehen mit der Operation $h_j c := \varphi_j(h_j)c$, für alle $h_j \in H_j$, alle $c \in \mathbb{C}$ und alle $j = 1, 2, 3$. Ferner sind H_1, H_2 und H_3 maximale Normalteiler von G. Daher sind H_1, H_2 und H_3 paarweise nicht konjugiert. Dies liefert drei nichtisomorphe einfache monomiale Objekte $(\mathrm{Ind}_{H_j}^G \mathbb{C}_{\varphi_j}, \{e \otimes \mathbb{C}, x_j \otimes \mathbb{C}\})$ von G, wobei $[G/H_j] = \{e, x_j\}$, $x_j \in G \setminus H_j$ für alle $j = 1, 2, 3$ ist (siehe Lemma 2.1.4(iii)). Die entsprechenden Darstellungen (hier wegen Satz 1.1.3 und Satz 1.1.4 in Form von $\mathbb{C}G$-Moduln) $\mathrm{Ind}_{H_1}^G \mathbb{C}_{\varphi_1}$, $\mathrm{Ind}_{H_2}^G \mathbb{C}_{\varphi_2}$, $\mathrm{Ind}_{H_3}^G \mathbb{C}_{\varphi_3}$ sind jedoch äquivalent (bzgl. der Ähnlichkeit), denn ihre Charaktere stimmen überein. Daher können äquivalente monomiale Darstellungen von G verschiedene nichtisomorphe Objekte in der monomialen Kategorie von G erzeugen.

1.4 G-Mengen und Doppelnebenklassen

Wir möchten nun ein paar wichtige Eigenschaften von G-Mengen und Doppelnebenklassen erläutern. Für zwei G-Mengen S und T heißt eine Abbildung $f : S \longrightarrow T$ ein G-Morphismus, falls $f(gs) = gf(s)$ für alle $g \in G$, $s \in S$ gilt. Die Abbildung f heißt G-Isomorphismus (oder Isomorphismus von G-Mengen), falls sie zusätzlich bijektiv ist. Für eine G-Menge S und $x \in S$ bezeichnen wir mit Gx die G-Bahn von x und mit G_x den Stabilisator von x. Zunächst beweisen wir ein sehr einfaches, aber wichtiges Lemma.

Lemma 1.4.1 *Es seien G eine Gruppe, E eine G-Menge und $x \in E$. Dann gilt folgender Isomorphismus von G-Mengen:*

$$Gx \cong G/G_x.$$

Beweis: Es sei $\varphi : Gx \longrightarrow G/G_x$ definiert durch $\varphi(gx) = gG_x$ für beliebige $g \in G$. Weiter sei $h \in G$. Dann gilt: $gx = hx \Longleftrightarrow h^{-1}gx = x \Longleftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Longleftrightarrow hG_x = gG_x$. Also ist φ wohldefiniert und injektiv. φ ist offensichtlich surjektiv und ein G-Morphismus. Also ist φ ein Isomorphismus von G-Mengen. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Es seien H und K Untergruppen von G. Eine (H, K)-**Doppelnebenklasse** in G ist eine Teilmenge von G von der Form $HgK = \{hgk|\, h \in H, k \in K\}$ für ein Element $g \in G$.

Satz 1.4.2 *Je zwei Doppelnebenklassen sind entweder gleich oder disjunkt.*

Beweis: Es seien HsK und HtK zwei (H, K)-Doppelnebenklassen in G. Angenommen $HsK \cap HtK \neq \varnothing$. Dann gibt es $h, h_1 \in H$ und $k, k_1 \in K$ mit $hsk = h_1tk_1$. Daraus folgt $s = (h^{-1}h_1)t(k_1k^{-1}) \in HtK$ und $t = (h_1^{-1}h)s(kk_1^{-1}) \in HsK$. Also ist $HsK = HtK$. □

Die Doppelnebenklassen bilden also wie die gewöhnlichen Nebenklassen eine Partition von G. Im Fall einer endlichen Gruppe G, läßt sich die Anzahl von Elementen einer Doppelnebenklasse durch den folgenden Satz bestimmen.

Satz 1.4.3 *Es seien G eine endliche Gruppe und H und K zwei Untergruppen von G. Weiter sei $g \in G$. Dann gilt:*

$$|HgK| = |H||K|/|H \cap {}^gK| = |H||K|/|H^g \cap K|.$$

Beweis: Siehe [**1**, Proposition 15, Seite 35]. □

Wie wir später sehen werden, ist der folgende Satz von sehr großer Bedeutung. Und zwar nicht nur beim Studium des Ringes der monomialen Darstellungen, sondern auch bei dem Burnside-Ring. Mit $H\backslash G/K$ bezeichnen wir die Menge der Doppelnebenklassen von (H, K) in G und mit $[H \backslash G/K]$ ein vollständiges Repräsentantensystem von Doppelnebenklassen aus $H \backslash G/K$. $[H \backslash G/K]$ ist also eine Teilmenge von G mit $G = \dot{\bigcup}_{x\in[H\backslash G/K]} HxK$. Die Menge G/H (bzw. G/K) der Linksnebenklassen nach H (bzw. K) ist offensichtlich eine(transitive) G-Menge durch die Operation $g(xH) := gxH$ (bzw. $g(yK) := gyK$). Also ist $(G/H) \times (G/K)$ eine G-Menge durch die zugehörige diagonale Operation. Damit erhalten wir den folgenden wichtigen Isomorphismus von G-Mengen:

Satz 1.4.4 *Unter den obenstehenden Voraussetzungen gilt der folgende Isomorphismus von G-Mengen:*

$$(G/H) \times (G/K) \cong \bigcup_{g\in[H\backslash G/K]} (G/H \cap {}^gK).$$

BEWEIS: Es sei $G = \dot{\bigcup}_g HgK$ eine Partition von G in (H,K)-Doppelnebenklassen. Für eine Doppelnebenklasse HgK wählen wir ein Element r_g der Gestalt $(H, gK) \in (G/H)\times(G/K)$ mit $g \in G$. G_{r_g} sei der Stabilisator von r_g bezüglich der diagonalen Operation. Dann gilt: $t \in G_{r_g} \Leftrightarrow tr_g = r_g \Leftrightarrow (tH, tgK) = (H, gK) \Leftrightarrow tH = H$ und $tgK = gK \Leftrightarrow t \in H$ und $t^g \in K \Leftrightarrow t \in H \cap {}^gK$. Also ist $G_{r_g} = H \cap {}^gK$. Die Bahn Gr_g von r_g ist isomorph (als G-Menge) zu der Menge G/G_{r_g} der Linksnebenklassen modulo des Stabilisators (nach Lemma 1.4.1).

Es seien $r_u, r_v \in (G/H) \times (G/K)$ wie oben mit $u, v \in G$. Dann gilt $Gr_u = Gr_v$ genau dann, wenn ein $x \in G$ existiert mit $r_u = xr_v$. Daraus folgt: $(H, uK) = (xH, xvK)$. Also $H = xH$ und $uK = xvK$. Also $x \in H$ und $uK = xvK$. Daraus folgt: $HuK = H(xvK) = (Hx)vK = HvK$.

Es sei umgekehrt $HuK = HvK$ für $u, v \in G$. Dann gilt $huK = h_1vK$ für $h, h_1 \in H$. Also $uK = xvK$ für $x = h^{-1}h_1 \in H$. Also $(H, uK) = x(H, vK)$. Dies bedeutet: $Gr_u = Gr_v$. Aus $(aH, bK) = a(H, a^{-1}bK)$ für alle $a, b \in G$ folgt: Jede G-Bahn von $(G/H) \times (G/K)$ enthält ein Element der Gestalt $r_x = (H, xK)$ für ein $x \in G$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}(G/H) \times (G/K) &= \bigcup_{g\in[H\backslash G/K]} Gr_g \\ &\cong \bigcup_{g\in[H\backslash G/K]} G/G_{r_g} \text{ (Nach Lemma 1.4.1)} \\ &= \bigcup_{g\in[H\backslash G/K]} G/H \cap {}^gK.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Es seien $H \leqslant G$, S eine H-Menge und $g \in G$. Die g-**Konjugierte** von S, bezeichnet mit ${}^gS$, ist die ${}^gH$-Menge S versehen mit der Operation

$$x \cdot s = (x^g)s = (g^{-1}xg)s$$

für alle $x \in {}^gH$, $s \in S$. Wir erläutern nun die Restriktion und die Induktion von G-Mengen.

Es sei $H \leqslant G$ und S eine G-Menge. Dann ist S eine H-Menge durch die Einschränkung der Operation auf H und wird in diesem Fall mit S_H (oder $\mathrm{Res}^G_H S$) bezeichnet. S_H heißt die **Restriktion** von G auf H.

Es sei $H \leqslant G$ und Z eine H-Menge. Dann ist $G \times Z$ durch die Operation $h(g, z) = (gh^{-1}, hz)$ für alle $h \in H$, $g \in G$, $z \in Z$ eine H-Menge. Ferner sei $G \times_H Z$ die Menge aller H-Bahnen von $G \times Z$. Dann ist $G \times_H Z$ durch die Operation $x \cdot (H(g, z)) := H(xg, z)$ für alle $x \in G$, $(g, z) \in G \times Z$ eine G-Menge. $G \times_H Z$ heißt die **Induktion** von H nach G und wird mit Z^G oder $\mathrm{Ind}^G_H Z$ bezeichnet.

Damit erhalten wir den fundamentalen Satz von Mackey über die Theorie der G-Mengen.

Satz 1.4.5 (Mackey) *Es seien H und K zwei Untergruppen von G und S eine H-Menge . Dann gilt:*

$$(S^G)_K \cong \bigcup_{t\in[K\backslash G/H]} (({}^tS)_{{}^tH\cap K})^K \ (als\ K-Mengen).$$

BEWEIS: Siehe [**13**, Chapter 15, Theorem 7.4]. □

Noch ein Lemma, das uns später helfen wird, die Sätze von Frobenius und Mackey auf den Ring $D(G)$ der monomialen Darstellungen zu übertragen.

Lemma 1.4.6 *Es seien U, V zwei Untergruppen von G und H eine Untergruppe von U. Ferner sei $[V \setminus G/U] = I$, und für $s \in I$ sei $J_s = [V \cap {}^sU \setminus {}^sU/{}^sH]$. Dann bilden die Menge $\{t \cdot s |\ s \in I, t \in J_s\}$ ein vollständiges Repräsentantensytem für $V \setminus G/H$.*

BEWEIS: Es seien $G = \dot{\bigcup}_{s \in I} VsU$ und ${}^sU = \dot{\bigcup}_{t \in J_s} (V \cap\ {}^sU)t\ ({}^sH)$ die zugehörigen Partitionen von G und ${}^sU$ in Doppelnebenklassen. Aus der zweiten Gleichung folgt: $sU = \dot{\bigcup}_{t \in J_s} (V \cap\ {}^sU)tsH$. Ersetzen wir dies in der ersten Gleichung unter Berücksichtigung der Gleichheit $V \cdot (V \cap\ {}^sU) = V$, so erhalten wir

$$G = \dot{\bigcup}_{s \in I} V \cdot (sU) = \dot{\bigcup}_{s \in I} V \cdot (\dot{\bigcup}_{t \in J_s} (V \cap {}^sU)tsH) = \bigcup_{s,t} VtsH.$$

Es bleibt noch nachzuprüfen, dass der letzte Ausdruck eine disjunkte Vereinigung darstellt. Es seien also $s, s' \in I$ und $t \in J_s$, $t' \in J_{s'}$ mit $VtsH = Vt's'H$. Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch zeigen, dass $s = s'$ und $t = t'$ gilt. Da $H \leqslant U$, gilt $VtsU = Vt's'U$. Also $Vt({}^sU)s = Vt'({}^{s'}U)s'$. Daraus folgt $V({}^sU)s = V({}^{s'}U)s'$ (weil $t \in {}^sU$ und $t' \in {}^{s'}U$). Also $VsU = Vs'U$. Somit gilt $s = s'$. Damit erhalten wir: $VtsH = Vt'sH$. Dies impliziert $Vt({}^sH) = Vt'({}^sH)$, also $t' \in Vt({}^sH)$. Also ist $t' = vt({}^sh)$ mit $v \in V$, $h \in H$. Also $v = t'({}^sh^{-1})t^{-1} \in V \cap {}^sU$. Daraus folgt

$$(V \cap {}^sU)t'({}^sH) = (V \cap {}^sU)vt({}^sh)({}^sH) = (V \cap {}^sU)t({}^sH).$$

Also $t' = t$. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Es seien N ein Normalteiler von G und S eine G/N-Menge. Dann ist die **inflatierte** G-Menge $\mathbf{Inf}(S)$ definiert durch

$$\mathrm{Inf}(S) = S \quad \text{und} \quad gs = (gN)s \quad \text{für alle} \quad g \in G,\ s \in S.$$

Aus der Definition folgt unmittelbar:

Lemma 1.4.7 *Es seien N ein Normalteiler von G und S, T G/N-Mengen. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Inf}(S \dot{\cup} T) = \mathrm{Inf}(S) \dot{\cup} \mathrm{Inf}(T)$ *(als G-Mengen),*

(ii) $\mathrm{Inf}(S \times T) = \mathrm{Inf}(S) \times \mathrm{Inf}(T)$ *(als G-Mengen),*

(iii) $S \cong T$ *(als G/N-Mengen)*$\Longleftrightarrow S \cong T$ *(als G-Mengen).*

Wir schließen dieses Kapitel mit der folgenden Bemerkung und der Definition von p- und p'-Faktoren.

Bemerkung 1.4.8 Es seien G und T zwei endliche Gruppen, H, K (bzw. I, J) Untergruppen von G (bzw. T). Ferner sei $(H \times I)(g, t)(K \times J)$ eine Doppelnebenklasse von $G \times T$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(H \times I)(g, t)(K \times J) &= \{(h, i)(g, t)(k, j) |\quad (h, i) \in H \times I,\ (k, j) \in K \times J\} \\ &= \{(hgk, itj) |\quad h \in H,\ i \in I,\ k \in K,\ j \in J\} \\ &= (HgK) \times (ItJ).\end{aligned}$$

Also ist

$$(H \times I)(g,t)(K \times J) = (H \times I)(u,v)(K \times J) \Longleftrightarrow HgK = HuK \ \wedge \ ItJ = IvJ.$$

Daher bildet $\{(g,t) |\, g \in [H \setminus G/K], t \in [I \setminus T/J]\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für $H \times I \setminus G \times T/K \times J$.

Es seien $x \in G$ und p eine Primzahl. Dann heißt x ein p-Element (bzw. p'-Element), falls seine Ordnung eine Potenz von p (bzw. zu p teilerfremd) ist. Zu jedem Element $x \in G$ existieren ein eindeutig bestimmtes p-Element x_p und ein eindeutig bestimmtes p'-Element $x_{p'}$ mit $x = x_p x_{p'} = x_{p'} x_p$. Wir nennen x_p den *p-Faktor* und $x_{p'}$ den *p'-Faktor* von x.

Kapitel 2

Der Ring $D(G)$

Im vorigen Kapitel haben wir die monomialen Objekte der Gruppe G eingeführt. Wir setzen nun $K = \mathbb{C}$ und betrachten die monomiale Kategorie $\mathcal{M}on_{\mathbb{C}G}$. Für ein monomiales Objekt M von G bezeichnen wir mit $[M]$ die Isomorphieklasse von M. Ferner seien F die von der Menge $\{[M] |\, M \in \mathcal{M}on_{\mathbb{C}G}\}$ erzeugte freie abelsche Gruppe und F_0 die Untergruppe von F, erzeugt von allen Elementen der Form $[M \oplus N] - [M] - [N]$ für alle $M, N \in \mathcal{M}on_{\mathbb{C}G}$.

Definition 2.0.1 *Die **Grothendieck-Gruppe** F/F_0 dieser Kategorie heißt der Ring der monomialen Darstellungen von G und wird mit $D(G)$ bezeichnet.*

Der Ring $D(G)$ ist mit der Multiplikation $[M] \cdot [N] = [M \otimes_{\mathbb{C}} N]$ ausgestattet.

Wegen Beispiel 2.3.8 wäre es auch korrekt, $D(G)$ „Ring der monomialen Objekten von G" zu nennen. Wir behalten trotzdem die obige Kennzeichnung bei.

Mit $\mathcal{M}_G$ bezeichnen wir die Menge der (monomialen) Paare (H, φ), wobei H eine Untergruppe von G und φ ein linearer Charakter von H (d.h. $\varphi \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^\times) =: \widehat{H}$) sind. Dabei ist $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt $\widehat{H} \cong H/H'$. Also (siehe auch [**12**, Satz, Seite 17]) $|\widehat{H}| = |H : H'|$, wobei H' die Kommutatorgruppe von H bezeichnet. Also ist $\mathcal{M}_G$ eine G-Menge durch die (Links-)Operation $g(H, \varphi) := {}^g(H, \varphi) = ({}^gH, {}^g\varphi)$ mit $g \in G$, ${}^gH = gHg^{-1}$ und ${}^g\varphi \in \mathrm{Hom}({}^gH, \mathbb{C}^\times)$ definiert durch ${}^g\varphi(h) = \varphi(h^g) = \varphi(g^{-1}hg)$ für alle $h \in {}^gH$. Die Menge der G-Bahnen bezüglich dieser Operation wird mit $\mathcal{M}_G/G$ bezeichnet und eine G-Bahn, die ein Paar (H, φ) enthält, mit $[H, \varphi]_G$. Für eine Primzahl p bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_G^p$ die Menge aller Paare $(H, \varphi) \in \mathcal{M}_G$, wobei φ ein p'-Element von $\widehat{H}$ ist. G operiert offensichlich durch die Konjugation auf $\mathcal{M}_G^p$, und die Menge der G-Bahnen unter dieser Operation wird mit $\mathcal{M}_G^p/G$ bezeichnet. Für $\varphi \in \widehat{H}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{C}_\varphi$ der $\mathbb{C}H$-Modul $\mathbb{C}$, versehen mit der Operation $hr := \varphi(h)r$, für alle $h \in H$ und alle $r \in \mathbb{C}$.

2.1 Eine Charakterisierung von $D(G)$

Dieser Abschnitt ist der Bestimmung freien $\mathbb{Z}$-Basen von $D(G)$ gewidmet. Zunächst beweisen wir:

Satz 2.1.1 *Es sei $\{[M_1], \ldots, [M_n]\}$ ein Repräsentantensytem von Isomorphieklassen von einfachen monomialen Objekten von G. Dann gilt:*

$$D(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}[M_i].$$

Beweis: Es sei P ein monomiales Objekt von G. Nach Bemerkung 1.2.3 gibt es einfache monomiale Objekte $Q_1, \ldots, Q_k$ von G mit $P = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_k$. Ferner gibt es für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ ein $u \in \{1, \ldots, n\}$ mit $[Q_i] = [M_u]$. Daraus folgt

$$[P] = \sum_{j=1}^{k} [Q_j] = \sum_{i=1}^{n} r_i(P)[M_i] \quad \text{in } D(G).$$

Dabei ist $r_i(P)$, für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, die Anzahl der Q_j, $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $[Q_j] = [M_i]$. Offenbar ist $r_i(U \oplus V) = r_i(U) + r_i(V)$ für beliebige monomiale Objekte U und V von G. Also ist r_i eine additive Funktion von $\mathcal{M}on_{\mathbb{C}G}$ in $\mathbb{Z}$. Daher induziert r_i einen additiven Homomorphismus $r_i' : F \longrightarrow \mathbb{Z}$. Und wegen der Additivität von r_i gilt $F_0 \subseteq Ker(r_i')$. Also induziert r_i einen additiven Homomorphismus $s_i : D(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Daher existiert ein additiver Homomorphismus

$$f : D(G) := F/F_0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(n)}; \quad [P] \longmapsto (s_1(P), \ldots, s_n(P)),$$

wobei $\mathbb{Z}^{(n)}$ die von einer n-elementigen Menge erzeugte freie abelsche Gruppe bezeichnet. Andererseits gibt es einen Homomorphismus

$$g : \mathbb{Z}^{(n)} \longrightarrow D(G); \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i[M_i].$$

Und es gilt $f \circ g(x_1, \ldots, x_n) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i[M_i]) = (x_1, \ldots, x_n)$. Also sind f und g zueinanders inverse Isomorphismen. Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir möchten nun eine neue freie $\mathbb{Z}$-Basis von $D(G)$ bestimmen. Dazu werden wir die Isomorphieklassen von einfachen monomialen Objekten von G parametrisieren. Als nächstes beweisen wir:

Lemma 2.1.2 *Ein monomiales Objet von G ist genau dann einfach, wenn es die Gestalt $(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi, \{g \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi |\, g \in [G/H]\})$ hat, wobei $(H, \varphi) \in \mathcal{M}_G$ gilt.*

Beweis: Die Geraden von $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi$ sind $g \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi$, wobei g ein vollständiges Repräsentantensystem $[G/H]$ von G/H durchläuft. Also ist die $\mathbb{C}$-lineare Operation von G auf der Geradenmenge von $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi$ transitiv. Daher ist $(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi, \{g \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi |\, g \in [G/H]\})$ ein einfaches monomiales Objekt von G.

Es sei umgekehrt $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ ein einfaches monomiales Objekt von G. Weiter sei $H := G_{V_1}$ der Stabilisator von V_1. Die $\mathbb{C}$-lineare Operation von G auf der Geradenmenge von V ist transitiv; daher gibt es für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein g_i mit $V_i = g_i V_1$, wobei $g_1 = 1$ gilt. Für $i \neq 1$ gilt $g_i \notin H$. Nach Lemma 1.4.1 ist also $(g_i)_{i=1,\ldots,n}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von G/H. Nach Satz 1.1.3 und Satz 1.1.4 erzeugt der $\mathbb{C}H$-Modul V_1 eine lineare Darstellung, und daher einen (linearen) Charakter φ, da V_1 eindimensional ist. Weiter sei $v \in V_1$ mit $v \neq 0$. Dann bildet die Menge $\{v_i := g_i v |\, i = 1, \ldots, n\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von V. Andererseits bildet $\{g_i \otimes_{\mathbb{C}H} 1 |\, i = 1, \ldots, n\}$ eine Basis von $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi$. Also induziert die Zuordnung $v_i \longmapsto g_i \otimes_{\mathbb{C}H} 1$ offenbar ein Isomorphismus $F : V \to \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Ferner seien $g \in G$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $h_i =: h \in H$ und ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $gg_i = g_j h$. Damit gilt

$$\begin{aligned} F(gv_i) &= F(gg_i v) = F(g_j h v) = F(g_j \varphi(h) v) = \varphi(h) F(v_j) = \varphi(h) g_j \otimes_{\mathbb{C}H} 1 \\ &= g\varphi(h) g^{-1} g_j \otimes_{\mathbb{C}H} 1 = g\varphi(h) g_i h^{-1} \otimes_{\mathbb{C}H} 1 = g\varphi(h) g_i \otimes_{\mathbb{C}H} h^{-1} \cdot 1 \\ &= g(g_i \otimes_{\mathbb{C}H} \varphi(h)\varphi(h^{-1})) = g(g_i \otimes_{\mathbb{C}H} 1) = gF(v_i). \end{aligned}$$

Daher ist F ein Isomorphismus von $\mathbb{C}G$-Moduln. Ferner gilt $F(V_i) = g_i \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daher ist F ein Isomorphismus von monomialen Objekten von $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ auf $(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi, \{g_i \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi | \, i = 1, \ldots, n\})$. □

Lemma 2.1.3 *Es seien $(H, \varphi), (K, \psi) \in \mathcal{M}_G$ und $F : \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi \longrightarrow \mathrm{Ind}_K^G \mathbb{C}_\psi$ ein Morphismus von monomialen Objekten von G mit $F \neq 0$. Dann ist F ein Epimorphismus von monomialen Objekten von G.*

Beweis: Da $F \neq 0$, gibt es $c, c' \in \mathbb{C}^\times$ und $x, x' \in G$ mit $F(x \otimes_{\mathbb{C}H} c) = x' \otimes_{\mathbb{C}K} c'$. Weiter seien $(g_i)_{i=1,\ldots,n}$ und $(g'_j)_{j=1,\ldots,m}$ vollständige Repräsentantensysteme von G/H (bzw. G/K). Dann gibt es Geraden $g_i \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi \subseteq \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi$ und $g'_j \otimes_{\mathbb{C}K} \mathbb{C}_\psi \subseteq \mathrm{Ind}_K^G \mathbb{C}_\psi$ mit $x \otimes_{\mathbb{C}H} c \in g_i \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi$ und $x' \otimes_{\mathbb{C}K} c \in g'_j \otimes_{\mathbb{C}K} \mathbb{C}_\psi$. Aus der $\mathbb{C}G$-Linearität folgt: $F(g_i \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi) = g'_j \otimes_{\mathbb{C}K} \mathbb{C}_\psi$. Ferner ist F ein G-Morphismus und $\{g'_1 \otimes_{\mathbb{C}K} \mathbb{C}_\psi, \ldots, g'_m \otimes_{\mathbb{C}K} \mathbb{C}_\psi\}$ eine transitive G-Menge. Daraus folgt die Surjektivität von F. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Für Elemente (H, φ), (K, ψ) von $\mathcal{M}_G$ bezeichnen wir mit $\gamma^G_{(H,\varphi),(K,\psi)}$ die Anzahl von Morphismen $F : \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi \longrightarrow \mathrm{Ind}_K^G \mathbb{C}_\psi$ von monomialen Objekten von G mit $F \neq 0$, gezählt bis auf skalare Faktoren. Weiter schreiben wir $(H, \varphi) \leqslant (K, \psi)$, falls $H \leqslant K$ und $\varphi = \psi|_H$; und $[H, \varphi]_G \leqslant [K, \psi]_G$, falls $(H, \varphi) \leqslant {}^x(K, \psi) = ({}^xK, {}^x\psi)$ für ein $x \in G$. Versehen mit diesen Relationen sind $\mathcal{M}_G$ und $\mathcal{M}_G/G$ trivialerweise partiell geordnete Mengen. Damit erhalten wir:

Lemma 2.1.4 *Für alle $(H, \varphi), (K, \psi) \in \mathcal{M}_G$ gilt:*

(i) $\gamma^G_{(H,\varphi),(K,\psi)} = |\{x \in [G/K] | \, (H, \varphi) \leqslant {}^x(K, \psi)\}|$
$= |\{x \in [H \setminus G/K] | \, (H, \varphi) \leqslant {}^x(K, \psi)\}|$.

(ii) $\gamma^G_{(H,\varphi),(K,\psi)} > 0 \Longleftrightarrow [H, \varphi]_G \leqslant [K, \psi]_G$.

(iii) $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi \cong \mathrm{Ind}_K^G \mathbb{C}_\psi \Longleftrightarrow [H, \varphi]_G = [K, \psi]_G$.

(iv) $\gamma^G_{(H,\varphi),(K,\psi)} = \gamma^G_{{}^s(H,\varphi),{}^t(K,\psi)}$ *für alle $s, t \in G$.*

(v) $\gamma^G_{(H,\varphi),(H,\varphi)} = |N_G(H, \varphi) : H|$ *mit* $N_G(H, \varphi) = \{g \in G | \, {}^g(H, \varphi) = (H, \varphi)\}$.

Beweis: Zu (i): Siehe [**3**, Lemma 1.4 (b)].
Zu (ii): Nach (i) gilt $\gamma^G_{(H,\varphi),(K,\psi)} > 0 \Longleftrightarrow$ es gibt ein $x \in G$ mit $(H, \varphi) \leqslant {}^x(K, \psi) \Longleftrightarrow [H, \varphi]_G \leqslant [K, \psi]_G$.
Zu (iii): ($\Longrightarrow$) folgt aus (i). Es sei umgekehrt $[H, \varphi]_G = [K, \psi]_G$. Dann gibt es wegen (ii) einen Morphismus von monomialen Objekten von G $f : \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi \longrightarrow \mathrm{Ind}_K^G \mathbb{C}_\psi$ mit $f \neq 0$. Nach Lemma 2.1.3 ist f surjektiv. Weiter gilt $|G : H| = |G : K|$ nach Voraussetzung. Also ist f bijektiv. Daher ist die Umkehrabbildung f^{-1} notwendigerweise ein Morphismus von monomialen Objekten von G.
Zu (iv): Nach (*i*) gilt $\gamma^G_{{}^s(H,\varphi),{}^t(K,\psi)} = |\{g \in [{}^sH \setminus G/{}^tK] | \, ({}^sH, {}^s\varphi) \leqslant ({}^{gt}K, {}^{gt}\psi)\}|$. Ferner gilt ${}^sH \leqslant {}^{gt}K$ und $\psi(a^{gt}) = \varphi(a^s)$ für alle $a \in {}^sH$ genau dann, wenn $H \leqslant s^{-1}gtKt^{-1}g^{-1}s$ und $\psi(t^{-1}g^{-1}sbs^{-1}gt) = \varphi(b)$ für alle $b \in H$ gilt. Wenn man also $g \in [{}^sH \setminus G/{}^tK]$ dem Element $s^{-1}gt \in [H \setminus G/K]$ zuordnet, erhält man

$$\begin{aligned} \gamma^G_{{}^s(H,\varphi),{}^t(K,\psi)} &= |\{u \in [H \setminus G/K]| \quad (H, \varphi) \leqslant {}^u(K, \psi)\}| \\ &= \gamma^G_{(H,\varphi),(K,\psi)} \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichheit bewiesen.
Zu (v): Folgt direkt aus (i). $\square$

Es sei nun M ein einfaches monomiales Objekt von G. Wegen Lemma 2.1.2 gibt es $(H,\varphi) \in \mathcal{M}_G$ mit $M = (\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi, \{g \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi | \ g \in [G/H]\})$. Ferner sei N ein weiteres einfaches monomiales Objekt von G. Dann ist $N = (\mathrm{Ind}_K^G \mathbb{C}_\psi, \{g \otimes_{\mathbb{C}K} \mathbb{C}_\psi | \ g \in [G/K]\})$ für ein $(K,\psi) \in \mathcal{M}_G$. Wegen Lemma 2.1.4(iii) gilt $M \cong N$ genau dann, wenn $[H,\varphi]_G = [K,\psi]_G$ gilt. Wegen Satz 2.1.1 kann man daher $\mathcal{M}_G/G$ als freie $\mathbb{Z}$-Basis von $D(G)$ auffaßen. Also gilt:

Bemerkung 2.1.5 $D(G)$ ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul und daher ein noetherscher Ring mit Einselement $[G,1]_G$. Also gilt folgendes:
(i) $D(G)$ ist ein direktes Produkt von endlich vielen unzerlegbaren Ringen. Die Faktoren sind eindeutig bestimmt als die von den primitiven Idempotenten erzeugten Ideale.
(ii) Jedes von Null verschiedene Idempotent von $D(G)$ lässt sich eindeutig als Summe von primitiven Idempotenten von $D(G)$ darstellen.
(iii) Die primitiven Idempotente von $D(G)$ sind paarweise orthogonal.

Nach dieser Charakterisierung möchten wir nun ein paar Tatsachen und Operationen wie etwa direkte Summe, Tensorprodukt, Restriktion, Induktion,... von monomialen Objekten in die neue $\mathbb{Z}$-Basis von $D(G)$ umschreiben.

2.2 Operationen auf $D(G)$

Aus der Transitivität der Induktion (für monomiale Objekte) folgt: $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Ind}_K^H \mathbb{C}_\varphi) \cong \mathrm{Ind}_K^G \mathbb{C}_\varphi$ für alle $(K,\varphi) \in \mathcal{M}_H$. Damit erhalten wir eine additive Abbildung (Homomorphismus bzgl. der Addition!)

$$\mathrm{Ind}_{+H}^{\ G} : D(H) \longrightarrow D(G); \quad [K,\varphi]_H \longmapsto [K,\varphi]_G \tag{2.2.1}$$

Es ist hier zu beachten, dass $\mathrm{Ind}_{+H}^{\ G}$ im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus ist. Es gilt trotzdem $\mathrm{Ind}_{+G}^{\ G} = Id_{D(G)}$.

Die Multiplikation in die neue $\mathbb{Z}$-Basis von $D(G)$ lässt sich wie folgt bestimmen:

Satz 2.2.1 *Für alle $[K,\psi]_G$ und $[H,\varphi]_G \in \mathcal{M}_G/G$ gilt:*

$$[K,\psi]_G \cdot [H,\varphi]_G = \sum_{a \in [K\backslash G/H]} [K \cap {}^aH, (\psi \cdot {}^a\varphi)|_{K \cap {}^aH}]_G$$

mit $\psi|_{K\cap {}^aH} \cdot {}^a\varphi|_{K\cap {}^aH} =: (\psi \cdot {}^a\varphi)|_{K\cap {}^aH}$.

Beweis: Um das Produkt von Basiselementen von $D(G)$ bzgl. der neuen $\mathbb{Z}$-Basis angeben zu können, brauchen wir nach Lemma 2.1.4 (iii) nur noch das Tensorprodukt $\mathrm{Ind}_K^G \mathbb{C}_\psi \otimes \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi$, für alle (K,ψ) und alle $(H,\varphi) \in \mathcal{M}_G$, als direkte Summe von einfachen monomialen Objekten darzustellen. Da die Operation von G auf der Geradenmenge von $\mathrm{Ind}_L^G \mathbb{C}_\rho$ ähnlich zur (transitiven) Operation von G auf G/L ist, für alle $(L,\rho) \in \mathcal{M}_G$, brauchen wir nur, die G-Bahnen von $G/K \times G/H$ zu bestimmen. Dies wurde bereits im Satz 1.4.4 getan. Wir haben auch im Beweis des Satzes 1.4.4 gesehen, dass jede G-Bahn von $G/K \times G/H$ immer ein Element der Gestalt (K, aH) für ein $a \in G$ enthält und dass der Stabilisator von (K, aH) bezüglich dieser Operation $K\cap {}^aH$ ist. Ferner ist die

Operation von $K\cap {}^aH$ auf der Geraden $(1\otimes_{\mathbb{C}K}\mathbb{C}_\psi)\otimes(a\otimes_{\mathbb{C}H}\mathbb{C}_\varphi)$ von $(\mathrm{Ind}_K^G\mathbb{C}_\psi)\otimes(\mathrm{Ind}_H^G\mathbb{C}_\varphi)$ (entsprechend der G-Bahn von (K, aH) in $G/K\times G/H$) gegeben durch: $\psi|_{K\cap {}^aH}\cdot {}^a\varphi|_{K\cap {}^aH}$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Es seien $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ ein monomiales Objekt von G und H der Stabilisator von V_1 bzgl. der $\mathbb{C}$-linearen Operation von G auf V. Für jedes f in der Gerade $V_1^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, \mathbb{C})$ von $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, jedes $g \in G$ und jedes $v \in V_1$ gilt: $(gf)(v) = f(g^{-1}v)$ (Definition 1.3.5). Dies zeigt, dass H auch der Stabilisator von V_1^* ist. Ferner sei φ der Charakter von V_1, betrachtet als monomiales Objekt von H (H operiert auf V_1 wie folgt: $hv := \varphi(h)v$; $h \in H$ und $v \in V_1$). Dann gilt:

$$(hf)(v) = f(h^{-1}v) = f(\varphi(h^{-1})v) = \varphi(h^{-1})f(v) = \varphi^{-1}(h)f(v)$$

für alle $f \in V_1^*$, $v \in V_1$ und $h \in H$. Dabei ist $\varphi^{-1} : H \to \mathbb{C}^\times; \quad h \mapsto \varphi(h^{-1})$. Also ist φ^{-1} der Charakter von V_1^* (monomiales Objekt von H). Daraus folgt: $(\mathrm{Ind}_H^G\mathbb{C}_\varphi)^* \cong \mathrm{Ind}_H^G\mathbb{C}_{\varphi^{-1}}$ (Satz 1.3.8(ii) in der Kategorie $\mathcal{M}on_{\mathbb{C}G}$). Und damit erhalten wir den Ringhomomorphismus

$$\sigma_G : D(G) \longrightarrow D(G); \quad [H, \varphi]_G \longmapsto [H, \varphi^{-1}]_G$$

Nach Satz 2.2.1 gilt $[G, \varphi]_G \cdot [H, \psi]_G = [H, \varphi|_H\psi]_G$ für alle $\varphi \in \widehat{G}$ und alle $(H, \psi) \in \mathcal{M}_G$. Also ist $[G, \varphi]_G \cdot [G, \psi]_G = [G, \varphi\psi]_G$ für alle $\varphi, \psi \in \widehat{G}$. Ferner ist $\widehat{G}$ eine multiplikative abelsche Gruppe. Also $[G, \varphi]_G \cdot [G, \varphi^{-1}]_G = [G, 1]_G$. Also ist die Menge $\{\pm[G, \varphi]_G | \varphi \in \widehat{G}\}$ eine multiplikative Untergruppe der Gruppe $D(G)^\times$ der Einheiten von $D(G)$.

Ferner seien T eine weitere endliche Gruppe und $f : T \longrightarrow G$ einGruppenmorphismus. Dann ist $(V, \{V_1, \ldots, V_n\})$ eine monomiales Objekt von T durch die Operation $xv := f(x)v$ für alle $x \in T$ und alle $v \in V$. Dieses Objekt wird mit $\mathrm{Res}_f V$ bezeichnet. Damit erhalten wir offenbar die folgenden kanonischen Isomorphismen von monomialen Objekten von T:

$$\mathrm{Res}_f(U \oplus V) \cong \mathrm{Res}_f U \oplus \mathrm{Res}_f V; \quad \mathrm{Res}_f(U \otimes V) \cong \mathrm{Res}_f U \otimes \mathrm{Res}_f V,$$

für beliebige monomialen Objekte U und V von G und f wie oben definiert. Und damit induziert f einen Ringhomomorphismus

$$\mathrm{Res}_{+f} : D(G) \longrightarrow D(T),$$

den wir durch das folgende Lemma bestimmen werden:

Lemma 2.2.2 *Für alle $[H, \varphi]_G \in D(G)$ gilt:*

$$\mathrm{Res}_{+f}[H, \varphi]_G = \sum_{g \in [f(T)\backslash G/H]} [f^{-1}({}^gH), {}^g\varphi \circ f]_T.$$

Beweis: Es sei $(H, \varphi) \in \mathcal{M}_G$. Dann ist die Geradenmenge von $\mathrm{Res}_{+f}(\mathrm{Ind}_H^G\mathbb{C}_\varphi)$ eine T-Menge durch die Operation $g'(r_i \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi) = f(g')r_i \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi$ für alle $r_i \in [G/H]$ und $g' \in T$. Dies bedeutet: G/H ist eine T-Menge durch $g'(r_iH) = f(g')r_iH$. Die T-Bahn von r_iH ist also $f(T)r_iH$. Es sei T_{r_iH} der Stabilisator von r_iH. Dann gilt: $x \in T_{r_iH} \Longleftrightarrow f(x)r_iH = r_iH \Longleftrightarrow r_i^{-1}f(x)r_iH = H \Longleftrightarrow f(x)^{r_i} \in H \Longleftrightarrow f(x) \in {}^{r_i}H$. Daraus folgt: $T_{r_iH} = f^{-1}({}^{r_i}H)$. Die Operation von T_{r_iH} auf der Geraden $r_i \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}_\varphi$ von $\mathrm{Ind}_H^G\mathbb{C}_\varphi$ ist gegeben durch: $h'(r_i \otimes_{\mathbb{C}H} 1) = f(h')r_i \otimes_{\mathbb{C}H} 1 = r_if(h')^{r_i} \otimes_{\mathbb{C}H} 1 = r_i \otimes_{\mathbb{C}H} \varphi(f(h')^{r_i}) = r_i \otimes_{\mathbb{C}H} {}^{r_i}\varphi(f(h')) = r_i \otimes_{\mathbb{C}H} {}^{r_i}\varphi \circ f(h')$ für alle $h' \in T_{r_iH}$. Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Einer der wichtigsten Spezialfälle dieses Lemmas ist $T \leqslant G$ und $f : H \longrightarrow G$ die Inklusionsabbildung. In diesem Fall schreiben wir $\mathrm{Res}_{+}{}_T^G$ anstelle von Res_{+f}. Daraus folgt:

$$\mathrm{Res}_{+}{}_T^G[K,\psi]_G = \sum_{g \in [T\backslash G/K]} [T \cap {}^gK, {}^g\psi|_{T\cap {}^gK}]_T. \tag{2.2.2}$$

Nach Lemma 2.1.4(i) und Formel 2.2.2 ist $\gamma^G_{(H,\varphi),(K,\psi)}$ der Koeffizient des Basiselements $[H,\varphi]_H \in D(H)$ in $\mathrm{Res}_{+}{}_H^G[K,\psi]_G$. Wir haben auch im Lemma 2.1.4(iv) gesehen, dass $\gamma^G_{(H,\varphi),(K,\psi)}$ nur von den Elementen $[H,\varphi]_G$, $[K,\psi]_G \in \mathcal{M}_G/G$ abhängt. Damit ist eine Bilinearform $\langle -,- \rangle$ auf $D(G)$ eindeutig bestimmt durch:

$$\langle [H,\varphi]_G, [K,\psi]_G \rangle_G := \gamma^G_{(H,\varphi),(K,\psi)} \tag{2.2.3}$$

Diese bilineare Form ist i.A. nicht symmetrisch.

Bemerkung 2.2.3 Es seien G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und M ein monomiales Objekt von G/N. Dann ist M ein monomiales Objekt von G durch **Inflation** (Siehe Lemma 1.4.7)

$$gm = (gN)m \quad \text{für alle} \quad g \in G \quad \text{und alle} \quad m \in M$$

Weiter sei $\pi : G \longrightarrow G/N$ die kanonische Projektion. Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{Inf}_{+}{}_N^G : D(G/N) \longrightarrow D(G); \quad [H/N,\varphi]_{G/N} \mapsto [H,\varphi\circ\pi]_G \tag{2.2.4}$$

ein injektiver Ringhomomorphismus (Siehe auch [**3**, Seite 16]).

Wir möchten nun den Ring der monomialen Darstellungen eines direkten Produkts zweier endlicher Gruppen berechnen. Es seien also T eine weitere (endliche) Gruppe, L eine Untergruppe von T und ψ ein linearer Charakter von L ($\psi \in \widehat{L}$). Dann gilt folgender Isomorphismus von $\mathbb{C}[G\times T]$-Moduln

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}_\varphi \otimes_{\mathbb{C})} \mathrm{Ind}_L^T \mathbb{C}_\psi \cong \mathrm{Ind}_{H\times L}^{G\times T} \mathbb{C}_{\varphi\psi}.$$

Alle linearen Charaktere sind irreduzibel, und die irreduziblen Charaktere von $G\times T$ sind genau die Produkte $\varphi\psi$ mit φ (bzw.ψ) irreduzibler Charakter von G (bzw. T). Daraus folgt $\widehat{G\times T} \cong \widehat{G} \times \widehat{T} = \{\varphi\psi |\ \varphi \in \widehat{G},\ \psi \in \widehat{T}\}$.
Wir nehmen nun an, dass $|G|$ und $|T|$ teilerfremd sind. Dann ist wegen [**13**, Chapter 15, Lemma 2.8] jede Untergruppe von $G\times T$ von der Gestalt $H\times L$ mit $H \leqslant G$ und $L \leqslant T$. Das gleiche Argument gilt für die Konjugationsklassen von Untergruppen von $G\times T$, G und T. Also ist $[H,\varphi]_G \otimes [L,\psi]_T \longleftrightarrow [H\times L, \varphi\psi]_{G\times T}$ eine bijektive Zuordnung zwischen Basen der freien $\mathbb{Z}$-Moduln $D(G)\otimes_{\mathbb{Z}} D(T)$ und $D(G\times T)$. Somit ist die Abbildung

$$d : D(G)\otimes_{\mathbb{Z}} D(T) \longrightarrow D(G\times T);\ [H,\varphi]_G \otimes [L,\psi]_T \longmapsto [H\times L,\varphi\psi]_{G\times T}$$

eine additive Bijektion. Es bleibt noch nachzuweisen, dass die Abbildung d auch ein multiplikativer Homomorphismus ist. Es genügt, wenn wir uns auf Basiselemente beschränken. Es seien also $x = [H,\varphi]_G \otimes [I,\varphi']_T$ und $y = [K,\psi]_G \otimes [J,\psi']_T$ zwei Elemente von

$D(G) \otimes_{\mathbb{Z}} D(T)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} xy &= ([H,\varphi]_G \cdot [K,\psi]_G) \otimes ([I,\varphi']_T \cdot [J,\psi']_{G'}) \\ &= \sum_{s\in[H\backslash G/K],\, t\in[I\backslash T/J]} [H \cap {}^sK, \varphi({}^s\psi)]_G \otimes [I \cap {}^tJ, \varphi'({}^t\psi')]_T \end{aligned}$$

Also:

$$d(xy) = \sum_{s\in[H\backslash G/K],\, t\in[I\backslash T/J]} [(H \cap {}^sK) \times (I \cap {}^tJ), \varphi({}^s\psi) \cdot \varphi'({}^t\psi')]_{G\times T}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} d(x)d(y) &= [H \times I, \varphi\varphi']_{G\times T} \cdot [K \times J, \psi\psi']_{G\times T} \\ &= \sum_{(u,v)\in[H\times I\backslash G\times T/K\times J]} [(H \times I) \cap ({}^{(u,v)}K \times J), \varphi\varphi'({}^{(u,v)}(\psi \times \psi'))]_{G\times T} \\ &= \sum_{(u,v)\in[H\times I\backslash G\times T/K\times J]} [(H \times I) \cap ({}^uK \times {}^vJ), \varphi\varphi'({}^u\psi)({}^v\psi')]_{G\times T} \\ &= \sum_{u\in[H\backslash G/K],\, v\in[I\backslash T/J]} [(H \cap {}^uK) \times (I \cap {}^vJ), \varphi\varphi'({}^u\psi)({}^v\psi')]_{G\times T} \\ &= d(xy). \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit folgt aus Bemerkung 1.4.8 und der Identität

$$(H \times I) \cap ({}^uK \times {}^vJ) = (H \cap {}^uK) \times (I \cap {}^vJ).$$

Wir haben also bewiesen:

Satz 2.2.4 *Aus* $(|G|, |T|) = 1$ *folgt:* $D(G) \otimes_{\mathbb{Z}} D(T) \cong D(G \times T)$.

2.3 Sätze von Frobenius und Mackey und Teilringe

Ziel dieses Abschnitts ist die Übertragung des Satzes 1.3.4(i) und des Satzes 1.4.5 auf den Ring $D(G)$ sowie die Beschreibung wichtiger Teilringe von $D(G)$. Zunächst zeigen wir:

Satz 2.3.1 *Es seien* $x, y \in D(G)$ *und* $\psi \in \widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$. *Dann gilt:*

$$\langle [G,\psi]_G \cdot x, [G,\psi]_G \cdot y \rangle_G = \langle x, y \rangle_G.$$

Beweis: Es genügt, die Gleichung für Basiselemente von $D(G)$ zu zeigen. Die allgemeine Gleichung gilt nach der Bilinearität von $\langle -, - \rangle_G$. Seien also $x = [H,\varphi]_G$ und $y = [K,\varphi']_G$. Nach Satz 2.2.1 und Lemma 2.1.4(i) gilt:

$$\begin{aligned} \langle [G,\psi][H,\varphi]_G, [G,\psi][K,\varphi']_G \rangle_G &= \gamma^G_{(H,\psi|_H\varphi),(K,\psi|_K\varphi')} \\ &= |\{t \in [G/K] \,|\, (H, \psi|_H\varphi) \leqslant {}^t(K, \psi|_K\varphi')\}| \\ &= |\{t \in [G/K] \,|\, H \leqslant {}^tK, \psi|_H\varphi = {}^t(\psi|_K\varphi')|_H\}| \\ &= |\{t \in [G/K] \,|\, H \leqslant {}^tK, \varphi = {}^t\varphi'|_H\} \\ &\quad (\text{weil} \quad {}^t(\psi|_K\varphi')|_H = \psi|_H{}^t\varphi'|_H) \\ &= |\{t \in [G/H] \,|\, (H,\varphi) \leqslant {}^t(K,\varphi')\}| \\ &= \gamma^G_{(H,\varphi),(K,\varphi')} \\ &= \langle [H,\varphi]_G, [K,\varphi']_G \rangle_G \\ &= \langle x, y \rangle_G. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Wir beweisen nun eine Übertragung des ersten Isomorphismus des Satzes 1.3.4(i) auf $D(G)$. Nach der Definition von $\langle -, - \rangle$ werden hier nur Morphismen f von monomialen Objekten mit $f \neq 0$ berücksichtigt.

Satz 2.3.2 (Frobeniusscher Reziprozitätssatz) *Es seien H eine Untergruppe von G, $x \in D(H)$ und $y \in D(G)$. Dann gilt:*

$$\langle \mathrm{Ind}_{+}{}_H^G(x), y \rangle_G = \langle x, \mathrm{Res}_{+}{}_H^G(y) \rangle_H .$$

Beweis: Wegen der Homomorphieeigenschaft von Res_+ und der Additivität von Ind_+ genügt es auch hier, die Gleichung auf Basiselementen nachzuprüfen. Seien also $x = [K, \varphi]_H \in D(H)$ und $y = [L, \psi]_G \in D(G)$. Dann gilt

$$\langle \mathrm{Ind}_{+}{}_H^G(x), y \rangle_G = \langle [K, \varphi]_G, [L, \psi]_G \rangle_G = |\{g \in [K \setminus G/L] |\; (K, \varphi) \leqslant {}^g(L, \psi)\}|$$

Anderseits gilt

$$\begin{aligned}
\langle x, \mathrm{Res}_{+}{}_H^G(y) \rangle_H &= \langle [K, \varphi]_H, \sum_{t \in [H \setminus G/L]} [H \cap {}^tL, {}^t\psi|_{H \cap {}^tL}]_H \rangle_H \\
&= \sum_{t \in [H \setminus G/L]} \langle [K, \varphi]_H, [H \cap {}^tL, {}^t\psi|_{H \cap {}^tL}]_H \rangle_H \\
&= \sum_{t \in [H \setminus G/L]} |\{s \in [K \setminus H/H \cap {}^tL] |\; (K, \varphi) \leqslant {}^s(H \cap {}^tL, {}^t\psi)\}|
\end{aligned}$$

Weiter gilt ${}^s(H \cap {}^tL, {}^t\psi) = (H \cap {}^{st}L, {}^{st}\psi)$. Aus $K \leqslant H$ folgt

$$(K, \varphi) \leqslant ({}^gL, {}^g\psi) \Longleftrightarrow (K, \varphi) \leqslant (H \cap {}^gL, {}^g\psi).$$

Ferner sei $T = [H \setminus G/L]$, und für $t \in T$ sei $S_t = [K \setminus H/H \cap {}^tL]$. Dann zeigt ein analoger Beweis zum Lemma 1.4.6, dass die Menge $\{s \cdot t |\; s \in S_t, t \in T\}$ ein Repräsentantensystem für $K \setminus G/L$ bildet. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Bemerkung 2.3.3 Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes gilt im Allgemeinen $\langle y, \mathrm{Ind}_{+}{}_H^G(x) \rangle_G = \langle \mathrm{Res}_{+}{}_H^G(y), x \rangle_H$ nicht. Dies bedeutet, dass der Satz 1.3.4(ii) sich nicht auf $D(G)$ übertragen lässt. Als Beispiel dazu wählen wir $G := \Sigma_3$, die Symmetrische Gruppe einer dreielementigen Menge, $H = \Sigma_2$, betrachtet als Untergruppe von G, $x = [H, 1]_H$ und $y = [H, 1]_G$. Dann ist einerseits wegen Lemma 2.1.4(v)

$$\langle y, \mathrm{Ind}_{+}{}_H^G(x) \rangle_G = \langle [H, 1]_G, [H, 1]_G \rangle_G = |N_G(H, 1) : H| = 1.$$

Und andererseits gilt wegen der Formel 2.2.2

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Res}_{+}{}_H^G(y), x \rangle_H &= \langle [H, 1]_H + [1, 1]_H, [H, 1]_H \rangle_H \\
&= \langle [H, 1]_H, [H, 1]_H \rangle_H + \langle [1, 1]_H, [H, 1]_H \rangle_H \\
&= \gamma^H_{(H,1),(H,1)} + \gamma^H_{(1,1),(H,1)} \\
&= |N_G(H, 1) : H| + |\{s \in [H/H] |\; (1, 1) \leqslant {}^s(H, 1)\}| \\
&= 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Es seien H eine Untergruppe von G und $t \in G$. Dann ist $H \cong {}^tH$. Dieser Gruppenisomorphismus induziert einen Ringisomorphismus c_t, definiert durch:

$$c_t : D(H) \longrightarrow D({}^tH); \quad [K, \psi]_H \mapsto [{}^tK, {}^t\psi]_{{}^tH}. \tag{2.3.1}$$

Allgemein gilt $D(G) \cong D(T)$ für beliebige endliche Gruppen G und T mit $G \cong T$, aber vielleicht nicht die Umkehrung.

Vermutung 2.3.4 Es gibt zwei endliche Gruppen G und T mit $D(G) \cong D(T)$ und $G \ncong T$. Mit anderen Wörtern, der Ring $D(G)$ bestimmt nicht die Isomorphieklasse der Gruppe G.

Diese Vermutung gilt für Burnside-Ringe (siehe Definition 2.3.10) und wurde im Jahr 1988 von Jacques Thévenaz bewiesen. Siehe etwa [**13**, Chapter 15, Beispiel 3.15] oder [**14**].

Der folgende Satz ist eine Übertragung des Satzes 1.4.5 auf $D(G)$.

Satz 2.3.5 (Mackey) *Es seien U und V Untergruppen von G und $x \in D(U)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Res}_{+}{}^G_V \mathrm{Ind}_{+}{}^G_U(x) = \sum_{t \in [V\backslash G/U]} \mathrm{Ind}_{+}{}^V_{V\cap {}^tU} \mathrm{Res}_{+}{}^{{}^tU}_{V\cap {}^tU}({}^tx).$$

Beweis: Es genügt uns, diese Gleichheit für ein Basiselement $x = [H, \varphi]_U \in D(U)$ nachzuweisen, da Ind_+ eine additive Abbildung und Res_+ ein Ringhomomorphismus sind. Nach der Gleichheit 2.2.1 gilt einerseits:

$$\mathrm{Res}_{+}{}^G_V \mathrm{Ind}_{+}{}^G_U(x) = \mathrm{Res}_{+}{}^G_V[H, \varphi]_G = \sum_{t \in [V\backslash G/H]} [V \cap {}^tH, {}^t\varphi]_V.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{t \in [V\backslash G/U]} \mathrm{Ind}_{+}{}^V_{V\cap {}^tU} \mathrm{Res}_{+}{}^{{}^tU}_{V\cap {}^tU}({}^tx) \\
&= \sum_{t \in [V\backslash G/U]} \mathrm{Ind}_{+}{}^V_{V\cap {}^tU} \mathrm{Res}_{+}{}^{{}^tU}_{V\cap {}^tU}[{}^tH, {}^t\varphi]_{{}^tU} \\
&= \sum_{t \in [V\backslash G/U]} \mathrm{Ind}_{+}{}^V_{V\cap {}^tU} \sum_{u \in [V\cap {}^tU \backslash {}^tU/{}^tH]} [V \cap {}^tU \cap {}^{ut}H, {}^{ut}\varphi]_{V\cap {}^tU} \\
&= \sum_{t \in [V\backslash G/U]} \sum_{u \in [V\cap {}^tU \backslash {}^tU/{}^tH]} [V \cap {}^{ut}H, {}^{ut}\varphi]_V.
\end{aligned}$$

Und der Satz folgt aus dem Lemma 1.4.6. □

Am Rande sei vermerkt, dass „D“ ein Mackey-Funktor ist. Es gilt folgende wichtige Eigenschaft (siehe auch Satz 1.3.3), die man auch Frobenius'sches Axiom in der Theorie der Mackey-Funktoren nennt. Wir wollen hier jedoch die Eigenschaft direkt beweisen und keine präzise Definition eines Mackey-Funktors angeben. Für die Einzelheiten dazu siehe [**4**].

Satz 2.3.6 *Es seien H eine Untergruppe von G, $x \in D(G)$ und $y \in D(H)$. Dann gilt:*

$$x \cdot \mathrm{Ind}_{+}{}^G_H(y) = \mathrm{Ind}_{+}{}^G_H(\mathrm{Res}_{+}{}^G_H(x) \cdot y).$$

Beweis: Es genügt uns hier wieder, die Gleichheit für Basiselemente von $D(G)$ nachzuprüfen. Es seien also $y = [U,\varphi]_H \in D(H)$ und $x = [V,\psi]_G \in D(G)$. Dann ist $\mathrm{Ind}_{+H}^{\,G}(y) = [U,\varphi]_G$. Nach Satz 2.2.1 und Gleichung 2.2.2 gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{+U}^{\,G}([U,\varphi]_U \cdot \mathrm{Res}_{+U}^{\,G}[V,\psi]_G) &= \mathrm{Ind}_{+U}^{\,G}([U,\varphi]_U \cdot \sum_{s\in[U\backslash G/V]} [U\cap {}^sV, {}^s\psi]_U) \\
&= \mathrm{Ind}_{+U}^{\,G}(\sum_{s\in[U\backslash G/V]} ([U,\varphi]_U \cdot [U\cap {}^sV, {}^s\psi]_U)) \\
&= \mathrm{Ind}_{+U}^{\,G}(\sum_{s\in[U\backslash G/V]} [U\cap {}^sV, \varphi\cdot {}^s\psi]_U) \\
&= \sum_{s\in[U\backslash G/V]} [U\cap {}^sV, \varphi\cdot {}^s\psi]_G = [U,\varphi]_G \cdot [V,\psi]_G
\end{aligned}$$

Ferner ist wegen der Transitivität der Restriktion und der obigen Relation

$$\begin{aligned}
[U,\varphi]_H \cdot \mathrm{Res}_{+H}^{\,G}[V,\psi]_G &= [U,\varphi]_H \cdot \sum_{s\in[H\backslash G/V]} [H\cap {}^sV, {}^s\psi]_H \\
&= \sum_{s\in[H\backslash G/V]} [U,\varphi]_H \cdot [H\cap {}^sV, {}^s\psi]_H \\
&\quad \text{(wegen der obigen Relation)} \\
&= \sum_{s\in[H\backslash G/V]} \mathrm{Ind}_{+U}^{\,H}([U,\varphi]_U \cdot \mathrm{Res}_{+U}^{\,H}[H\cap {}^sV, {}^s\psi]_H) \\
&= \mathrm{Ind}_{+U}^{\,H}([U,\varphi]_U \cdot \mathrm{Res}_{+U}^{\,H}(\sum_{s\in[H\backslash G/V]} [H\cap {}^sV, {}^s\psi]_H)) \\
&= \mathrm{Ind}_{+U}^{\,H}([U,\varphi]_U \cdot \mathrm{Res}_{+U}^{\,H}(\mathrm{Res}_{+H}^{\,G}[V,\psi]_G)) \\
&= \mathrm{Ind}_{+U}^{\,H}([U,\varphi]_U \cdot \mathrm{Res}_{+U}^{\,G}[V,\psi]_G).
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{+H}^{\,G}(\mathrm{Res}_{+H}^{\,G}(x)\cdot y) &= \mathrm{Ind}_{+H}^{\,G}(\mathrm{Ind}_{+U}^{\,H}(\mathrm{Res}_{+U}^{\,G}[V,\psi]_G \cdot [U,\varphi]_U)) \\
&\quad \text{(Transitivität der Induktion)} \\
&= \mathrm{Ind}_{+U}^{\,G}(\mathrm{Res}_{+U}^{\,G}[V,\psi]_G \cdot [U,\varphi]_U) \\
&= [V,\psi]_G \cdot [U,\varphi]_G \\
&= [V,\psi]_G \cdot \mathrm{Ind}_{+H}^{\,G}[U,\varphi]_H \\
&= x\cdot \mathrm{Ind}_{+H}^{\,G}(y).
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir beweisen jetzt eine hinreichende Bedingung für die Halbeinfachheit von $R\otimes_{\mathbb{Z}} D(G)$, für einen gegebenen kommutativen Ring R mit Einselement und der Charakteristik $n>0$. Es sei $D_R(G) = R\otimes_{\mathbb{Z}} D(G)$ die **Monomialalgebra** von G über R. Nach Bemerkung 2.1.5 ist $D_R(G)$ ein freier R-Modul, frei erzeugt von $1\otimes[H,\varphi]_G$, wobei $[H,\varphi]_G$ die Menge $\mathcal{M}_G/G$ durchläuft.

Lemma 2.3.7 *Ist n ein Teiler von $|G|$, so besitzt $D_R(G)$ ein nichttriviales nilpotentes Element.*

BEWEIS: Man setze $x = 1 \otimes [H,1]_G$, für einen Normalteiler H von G und den trivialen Charakter 1 von H. Dann ist $x \neq 0$. Nach Satz 2.2.1 gilt: $x^2 = (|G|/|H|)x = |G : H|x$. Insbesondere gilt für $H = \{1\}$, die triviale Untergruppe von G, $x^2 = |G|x = 0$ nach der Voraussetzung. Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Daraus ergibt sich:

Satz 2.3.8 *Es sei R ein beliebiger kommutativer Ring. Ist $D_R(G)$ halbeinfach, so ist die Charakteristik n von R kein Teiler von $|G|$.*

Bemerkung 2.3.9 Die obigen Ergebnisse zeigen, wie die (klassische) Darstellungstheorie sich auf den Darstellungsring $D(G)$ übertragen lässt. Wir schließen diesen Abschnitt mit den Beziehungen zwischen $D(G)$ und den anderen wohlbekannten Darstellungsringen.

Als nächstes erläutern wir die wichtigsten Teilringe von $D(G)$. Es sei p eine Primzahl und $D^p(G)$ der freie $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\mathcal{M}_G^p/G$. Dann ist $D^p(G)$ offenbar ein Teilring von $D(G)$, und alles, was wir bisher für $D(G)$ bewiesen haben, gilt auch für $D^p(G)$.

Es sei G-**Set** die Kategorie der endlichen G-Mengen und Morphismen von G-Mengen. Für eine G-Menge X bezeichnen wir mit $\overline{X}$ die Isomorphieklasse von X. Ferner seien Q die von der Menge $\{\overline{X} \mid X \in G\text{-}\mathbf{Set}\}$ erzeugte freie abelsche Gruppe und Q_0 die Untergruppe, die von allen Elementen der Form $\overline{X \dot\cup Y} - \overline{X} - \overline{Y}$ erzeugt wird.

Definition 2.3.10 (L. Solomon) *Die Grothendieck-Gruppe Q/Q_0 dieser Kategorie heißt der **Burnside-Ring** von G und wird mit $B(G)$ bezeichnet.*

Die Isomorphieklassen von transitiven G-Mengen bilden also eine freie $\mathbb{Z}$-Basis von $B(G)$. Es sei $\{H_1, \dots, H_n\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von Kongugationsklassen von Untergruppen von G. Dann bildet die Menge $\{\overline{G/H_1}, \dots, \overline{G/H_n}\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von Isomorphieklassen von transitiven G-Mengen und daher eine freie $\mathbb{Z}$-Basis von $B(G)$. $\overline{G/G}$ ist das Einselement von $B(G)$. Für eine ausführliche Studie des Burnside-Rings $B(G)$ siehe etwa [**13**, Chapter 15]. Für zwei G-Mengen S und T wird die Multiplikation bestimmt durch $\overline{S} \cdot \overline{T} = \overline{S \times T}$. Also ist für Untergruppen H und K von G die Multiplikation in $B(G)$ wegen Satz 1.4.4 gegeben durch:

$$\overline{G/H} \cdot \overline{G/K} = \sum_{s \in [H \backslash G/K]} \overline{G/(H \cap {}^sK)}. \tag{2.3.2}$$

Also ist die Abbildung

$$\varepsilon_G : B(G) \longrightarrow D(G); \quad \overline{G/H} \longmapsto [H,1]_G$$

ein Ringmonomorphismus. Eine natürliche Linksinverse von ε_G ist der Ringhomomorphismus

$$\pi_G : D(G) \longrightarrow B(G); \quad [H,\varphi]_G \longmapsto \overline{G/H}.$$

Daher ist $B(G)$ ist Teilring von $D(G)$. Es ist hier zu beachten, dass $B(G)$ für eine beliebige Primzahl p bereits in $D^p(G)$ liegt. $D(G)$ ist also durch π_G eine Augmentationsalgebra über $B(G)$. Alles, was wir bisher für $D(G)$ bewiesen haben, gilt also auch in $B(G)$. Insbesondere sieht man leicht, dass die Multiplikation in $B(G)$ (Formel 2.3.2) ein Spezialfall der Formel des Satzes 2.2.1 ist. Und die Menge $B(G)^\times$ der Einheiten von $B(G)$ liegt auch in $D(G)^\times$.

Die Einheiten von $B(G)$ sind schon bekannt durch eine Arbeit von Matsuda (1982) (siehe [**13**, Chapter 15, Theorem 9.5]). Also gilt (nach einer Anmerkung zum Satz 2.2.1)

$$\{\pm[G,\varphi]_G|\,\varphi\in\widehat{G}\}\cdot B(G)^{\times}\leqslant D(G)^{\times}.$$

Für eine G-Menge S und eine Untergruppe H von G bezeichnen wir mit S^H die Menge der H-Fixpunkte von S. Damit induziert die Abbildung

$$s_H^{B(G)}: B(G)\longrightarrow\mathbb{Z};\quad \overline{S}\longmapsto|S^H| \tag{2.3.3}$$

einen Ringhomomorphismus. Dieser heißt *Markenhomomorphismus* oder *Species* von $B(G)$. Für $H,K\leqslant G$ gilt $s_H^{B(G)}=s_K^{B(G)}$ genau dann, wenn H und K in G konjugiert sind (Bezeichnung: $H\sim_G K$). Daher ist die Anzahl der *Species* von $B(G)$ gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von Untergruppen von G, die selbst gleich dem $\mathbb{Z}$-Rang von $B(G)$ ist. Es sei nun p eine Primzahl und $\tau:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die kanonische Projektion. Ferner sei $\bar{s}_H^{B(G)}=\tau\circ s_H^{B(G)}: B(G)\longrightarrow\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die Reduktion modulo p von $s_H^{B(G)}$. Bekanntlich ist $\bar{s}_H^{B(G)}=\bar{s}_K^{B(G)}$ genau dann, wenn $O^p(H)$ und $O^p(K)$ in G konjugiert sind. Dabei ist $O^p(H)$ der (eindeutig bestimmte) kleinste Normalteiler von H, so dass $H/O^p(H)$ eine p-Gruppe ist, und heißt *p-Residuum* von H. Der Ring $B(G)$ ist besser erforscht als $D(G)$.

Es sei $\varphi\in\widehat{G}$ und $[H,\psi]_G\in D(G)$. Nach Satz 2.2.1 gilt:

$$[G,\varphi]_G\cdot[H,\psi]_G=[H,\varphi|_H\cdot\psi]_G. \tag{2.3.4}$$

Also ist $\mathbb{Z}\widehat{G}$ ein Teilring von $D(G)$. $D(G)$ ist auch eine Augmentationsalgebra über $\mathbb{Z}\widehat{G}$.

Bemerkung 2.3.11 Es sei $\mathrm{Irr}(G)$ die Menge der irreduziblen Charaktere von G. Dann gilt offenbar $\widehat{G}\subseteq\mathrm{Irr}(G)$. Nach [**10**, Lemma 2.22] gilt: Für jeden Normalteiler N von G gibt es eine Bijektion $\vartheta\mapsto\widehat{\vartheta}$ zwischen den Charakteren ϑ von G mit $N\subseteq\mathrm{Ker}(\vartheta)$ und den Charakteren $\widehat{\vartheta}$ von G/N. Dabei ist $\mathrm{Ker}(\vartheta):=\{g\in G|\,\vartheta(g)=\vartheta(1)\}$. Einem Charakter ϑ von G mit $N\subseteq\mathrm{Ker}(\vartheta)$ wird der Charakter $\widehat{\vartheta}$ von G/N zugeordnet, definiert durch: $\widehat{\vartheta}(Ng)=\vartheta(g)$, $g\in G$. Weiter ist ϑ unter dieser Voraussetzung genau dann irreduzibel, wenn $\widehat{\vartheta}$ dies ist. Also gilt auch das gleiche Argument für die irreduziblen Charaktere von G und G/N, d.h.

$$|\{\vartheta|\,\vartheta\in\mathrm{Irr}(G),N\subseteq\mathrm{Ker}\vartheta\}|=|\,\mathrm{Irr}(G/N)|.$$

Es sei nun λ ein linearer Charakter von G. Dann ist $G'\subseteq\mathrm{Ker}\lambda$, wobei G' die Kommutatorgruppe von G bezeichnet. Da $G^{ab}:=G/G'$ kommutativ ist, gilt $(G^{ab})'=\{1\}$. Also ist

$$|\widehat{G^{ab}}|=|G^{ab}:\{1\}|=|G^{ab}|=|G:G'|=|\widehat{G}|.$$

Also lässt sich jeder lineare Charakter von G/G' zu einem linearen Charakter von G liften und es ist $\widehat{G}\cong G/G'$.

Es sei $R(G)$ der Charakterring von G. Bekanntlich ist die Menge $\mathrm{Irr}(G)$ eine freie $\mathbb{Z}$-Basis von $R(G)$. Ferner seien ζ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel und $R^{ab}(G):=\mathbb{Z}\,\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Q}(\zeta)^{\times})\cong\mathbb{Z}\widehat{G}$. Dann gilt $R^{ab}(G)\cong R(G/G')$. Damit erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$\theta_G: R^{ab}(G)\longrightarrow D(G);\quad \varphi\longmapsto[G,\varphi]_G. \tag{2.3.5}$$

Ein Linksinverses von θ_G ist gegeben durch:

$$\omega_G : D(G) \longrightarrow R^{ab}(G); \quad [H,\varphi]_G \longmapsto \begin{cases} \varphi & \text{falls } H = G, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Es seien p eine Primzahl und P ein Primideal von $\mathbb{Z}[\zeta]$ mit $p \in P$. Dann ist $\mathbb{Z}[\zeta]/P$ ein Körper der Charakteristik p (P ist auch ein Maximalideal, da $\mathbb{Z}[\zeta]$ ein Dedekindring ist). Ferner sei $gG' \in G^{ab}$. Dann sind die *Species* von $R^{ab}(G)$ definiert durch

$$s_{gG'}^{R^{ab}(G)} : R^{ab}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}[\zeta]; \quad \vartheta \longmapsto \vartheta(gG'). \tag{2.3.7}$$

Es seien nun $\tau : \mathbb{Z}[\zeta] \longrightarrow \mathbb{Z}[\zeta]/P$ die kanonische Projektion und $\bar{s}_{gG'}^{R^{ab}(G)} = \tau \circ s_{gG'}^{R^{ab}(G)}$ die Reduktion modulo P von $s_{gG'}^{R^{ab}(G)}$. Nach [**8**, Lemma 3.4] gilt: $\bar{s}_{gG'}^{R^{ab}(G)} = \bar{s}_{kG'}^{R^{ab}(G)}$ genau dann, wenn $(gG')_{p'} = g_{p'}G'$ und $(kG')_{p'} = k_{p'}G'$ in G konjugiert sind. Das heißt $g_{p'}G' = k_{p'}G'$, da G/G' eine abelsche Gruppe ist. Dabei ist p die Charakteristik des Körpers $\mathbb{Z}[\zeta]/P$.

Wir werden im nächsten Abschnitt die modularen *Species* von $D(G)$ charakterisieren und die Menge der Primideale in $\mathbb{Z}[\zeta] \otimes_{\mathbb{Z}} D(G)$ untersuchen.

2.4 Das Primspektrum von $D_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$ und seine Anwendungen

Es seien R ein Dedekindring und A eine kommutative R-Algebra mit Einselement, die torsionsfrei und endlich erzeugt als R-Modul ist. Einen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow R$ nennen wir **Species** von A. Ferner nennen wir A **geschlossene** Algebra, falls es Species $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ von A mit der Eigenschaft $\bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker}(\varphi_i) = 0$ gibt.

Es sei ζ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel. Wir erläutern zunächst die *Species* von $D(G)$.

Gegeben sei $\mathcal{D}(G) := \{(H, hH') |\, H \leqslant G, h \in H\}$. Dann operiert G auf $\mathcal{D}(G)$ durch Konjugation. Für zwei Paare (H, hH'), $(K, kK') \in \mathcal{D}(G)$ schreiben wir $(H, hH') \sim_G (K, kK')$, falls (H, hH') und (K, kK') zur gleichen G-Bahn gehören, und mit $\mathcal{D}(G)/G$ wird die Menge der G-Bahnen von $\mathcal{D}(G)$ bezüglich dieser Operation (Konjugation) bezeichnet.
Nach [**5**, Abschnitt 2.3] sind die *Species* von $D(G)$ Homomorphismen $s_{(H,hH')}^{D(G)}$, definiert durch

$$s_{(H,hH')}^{D(G)} : D(G) \overset{\mathrm{Res}_{+}{}_H^G}{\longrightarrow} D(H) \xrightarrow{\omega_H} R^{ab}(H) \overset{s_{hH'}^{R^{ab}(H)}}{\longrightarrow} \mathbb{Z}[\zeta] \tag{2.4.1}$$

wobei ω_H (bzw. $\mathrm{Res}_{+}{}_H^G$, $s_{hH'}^{R^{ab}(H)}$) die Ringhomomorphismen 2.3.6 (bzw. 2.2.2, 2.3.7) sind.

Es seien U und V Untergruppen von G. Dann heißt U zu V *subkonjugiert*, falls U zu einer Untergruppe von V konjugiert ist. Gegebenenfalls schreiben wir $U \leqslant_G V$. Damit gilt

Satz 2.4.1 *Für alle (H, hH'), $(K, kK') \in \mathcal{D}(G)$ und alle $[L, \varphi]_G \in \mathcal{M}_G/G$ gilt:*

(i) $s_{(H,hH')}^{D(G)}([L,\varphi]_G) \neq 0 \Longrightarrow H \leqslant_G L$.

(ii) $s_{(H,hH')}^{D(G)} = s_{(K,kK')}^{D(G)} \Longleftrightarrow (H, hH') \sim_G (K, kK')$. *Also hat $D(G)$ genau $|\mathcal{D}(G)/G|$ Species.*

(iii) $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} D(G) = |\mathcal{M}_G/G| = |\mathcal{D}(G)/G|$, *wobei* $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} D(G)$ *den $\mathbb{Z}$-Rang von $D(G)$ bezeichnet.*

BEWEIS: Zu (i): Folgt offenbar aus der obigen Formel 2.4.1.
Zu (ii) und (iii) : Folgt aus [**4**, Proposition 2.4]. □

Es sei R ein Ring. Mit einer **Primkette** der Länge n ist eine Menge $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ von Primidealen in R mit $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ gemeint. Unter **(klassischer) Krull-Dimension** von R verstehen wir die maximale Länge aller Primketten aus R. Der Ring $\mathbb{Z}$ hat Krull-Dimension 1. Eine maximale Kette von Primidealen aus $\mathbb{Z}$ hat offenbar die Gestalt $0 \subset p\mathbb{Z}$, wobei p eine Primzahl ist. Allgemeiner hat jeder Dedekindring, der kein Körper ist, Krull-Dimension 1. Jeder Körper (oder allgemeiner jeder einfache Ring) hat Krull-Dimension 0.

Nun betrachten wir $\Omega = \mathbb{Z}[\zeta] \otimes_{\mathbb{Z}} D(G)$. Ω ist offenbar eine kommutative $\mathbb{Z}[\zeta]$-Algebra. Die *Species* $s^{\Omega}_{(H,hH')}$ von Ω sind genau die Fortsetzungen der *Species* $s^{D(G)}_{(H,hH')}$ von $D(G)$. Es seien $n = |\mathcal{M}_G/G|$ und (implizit) $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}[\zeta]$ die verschiedenen Species von Ω. Nach dem Lemma von Dedekind sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ linear unabhängig, weil sie verschieden sind. Wegen Satz 2.4.1(ii) und [**5**, 2.1.d, S.10] ist

$$\Theta : \mathbb{Q}(\zeta) \otimes_{\mathbb{Z}} D(G) \to \mathbb{Q}(\zeta)^n; \quad x \mapsto (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{Q}(\zeta)$-Algebren. Daraus folgt

$$\mathrm{Ker}(\Theta) = 0 = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\sigma_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\sigma_i).$$

Also ist Ω eine geschlossene $\mathbb{Z}[\zeta]$-Algebra. Weiter seien P ein Primideal von $\mathbb{Z}[\zeta]$, σ_i, σ_j Species von Ω mit $i \neq j$. Wir bezeichnen $q \circ \sigma_i$ (bzw. $q \circ \sigma_j$) mit $\bar{\sigma}_i$ (bzw. $\bar{\sigma}_j$), wobei $q : \mathbb{Z}[\zeta] \longrightarrow \mathbb{Z}[\zeta]/P$ die kanonische Projektion ist. Damit erhalten wir folgende implizite Form des Primspektrums von Ω.

Satz 2.4.2

(i) Jedes Primideal von Ω ist von der Form $\sigma_i^{-1}(P)$ für eine Species σ_i von Ω und ein Primideal P von $\mathbb{Z}[\zeta]$.

(ii) $\sigma_i^{-1}(P) = \sigma_j^{-1}(P) \Longleftrightarrow \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_j$.

(iii) Ω besitzt Krull-Dimension 1; insbesondere sind die Primideale der Form $\mathrm{Ker}(\sigma_i)$ minimal und Primideale der Form $\sigma_i^{-1}(P)$ für $P \neq 0$ maximal.

(iv) Ω ist eine ganze Ringerweiterung von $D(G)$.

BEWEIS: Zu (i): folgt aus [**8**, Satz 1.2 (ii)].
Zu (ii): folgt aus [**8**, Lemma 1.4 ((1) $\Longleftrightarrow$ (4))], da Ω eine geschlossene Algebra ist.
Zu (iii): folgt aus [**8**, Satz 1.2 (iii)].
Zu (iv): Es gilt $\Omega = D(G)[\zeta]$. Ferner gilt $\zeta^{|G|} = 1$. Also ist ζ ganz über $D(G)$. Daher ist Ω eine ganze Ringerweiterung von $D(G)$. □

Wir werden später eine explizite Form dieses Satzes beweisen (siehe Satz 2.4.9). Dazu charakterisieren wir zunächst die modulare Species von $D(G)$.

2.4.1 Charakterisierung der modularen Species

Es seien P ein nichttriviales Primideal von $\mathbb{Z}[\zeta]$ und p eine Primzahl mit $p \in P$. Dann ist $\mathbb{Z}[\zeta]/P$ ein Körper der Charakteristik p. Ferner sei $\bar{s}^{D(G)}_{(H,hH')}$ die Reduktion modulo P der *Species* $s^{D(G)}_{(H,hH')}$ von $D(G)$. Nach der Relation 2.4.1 und [**8**, Lemma 3.4] wissen wir, dass $\bar{s}^{D(G)}_{(H,hH')} = \bar{s}^{D(G)}_{(H,h_{p'}H')}$ gilt. Ziel ist hier eine gruppentheoretische Charakterisierung der Species modulo P von $D(G)$. Der Normalisator eines Paares $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ wird definiert durch:

$$\begin{aligned} N_G(H, hH') :&= \{g \in N_G(H) |\, ghg^{-1}H' = hH'\} \\ &= \{g \in G|\, {}^g(H, hH') = (H, hH')\} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt:

$$H' \trianglelefteq H \trianglelefteq N_G(H, hH') \leqslant N_G(H) \leqslant N_G(H') \quad \text{und} \quad N_G(H, hH')/H' = C_{N_G(H)/H'}(hH').$$

Damit erhalten wir

Lemma 2.4.3 *Es seien $h \in H$ und K/H eine p-Untergruppe von $N_G(H, hH')/H$. Dann gilt:*

$$\bar{s}^{D(G)}_{(H,hH')} = \bar{s}^{D(G)}_{(K,hK')}.$$

Beweis: O.B.d.A. sei $G = K$ und $H' = 1$. Dann ist H ein Normalteiler von G, G/H eine p-Gruppe und $h \in Z(G)$, das Zentrum von G. Ferner sei $(L, \lambda) \in \mathcal{M}_G$. Für $L = G$ gilt (nach Relation 2.4.1):

$$s^{D(G)}_{(G,hG')}([L, \lambda]_G) = \lambda(h) = s^{D(G)}_{(H,hH')}([L, \lambda]_G)$$

Es sei nun $L < G$. Dann ist $s^{D(G)}_{(G,hG')}([L, \lambda]_G) = 0$. Im Fall $H \nsubseteq L$ gilt wegen Satz 2.4.1(i) auch $s^{D(G)}_{(H,hH')}([L, \lambda]_G) = 0$. Es sei also $H \leqslant L < G$. Dann ist

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(H,hH')}([L, \lambda]_G) &= \sum_{g \in [G/L]} \lambda(g^{-1}hg) \\ &= \sum_{g \in [G/L]} \lambda(h) \quad (\text{weil} \quad h \in Z(G)) \\ &= |G : L|\lambda(h) \\ &\equiv 0 \pmod{P}. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Es sei also $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ gegeben. Wir wählen $H_1 \leqslant N_G(H, hH')$ mit H_1/H p-Sylowgruppe von $N_G(H, hH')/H$ (Bezeichnung: $H_1/H \in \mathrm{Syl}_p(N_G(H, hH')/H)$). Nach dem obigen Lemma und [**8**, Lemma 3.4] gilt

$$\bar{s}^{D(G)}_{(H,hH')} = \bar{s}^{D(G)}_{(H,h_{p'}H')} = \bar{s}^{D(G)}_{(H_1,hH_1')}. \tag{2.4.2}$$

Als nächstes wählen wir eine Untergruppe H_2 von $N_G(H_1, hH_1')$ mit $H_2/H_1 \in \mathrm{Syl}_p(N_G(H_1, hH_1')/H_1)$. Dann gilt auch

$$\bar{s}^{D(G)}_{(H_1,hH_1')} = \bar{s}^{D(G)}_{(H_2,hH_2')}.$$

Und so weiter bis zum Paar (H_n, hH_n') mit $p \nmid |N_G(H_n, hH_n') : H_n|$. Das Paar $(H_n, hH_n') =: (\tilde{H}, h\tilde{H}')$ ist bis auf Konjugation eindeutig, weil die p-Sylowgruppen es sind. Also liefert jedes Paar $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ eindeutig bis auf Konjugation ein Paar $(\tilde{H}, h\tilde{H}') \in \mathcal{D}(G)$ (und daher ein Paar $(\tilde{H}, h_{p'}\tilde{H}') \in \mathcal{D}(G)$).

Damit erhalten wir:

Bemerkung 2.4.4 Zu jeder Untergruppe H von G und jedem $h \in H$ existiert also eine Untergruppe $\tilde{H}$ von G mit folgenden Eigenschaften:

(i) $O^p(\tilde{H}) \subseteq H \subseteq \tilde{H}$,

(ii) $p \nmid |N_G(\tilde{H}, h\tilde{H}') : \tilde{H}|$,

(iii) $\bar{s}^{D(G)}_{(H,hH')} = \bar{s}^{D(G)}_{(\tilde{H},h\tilde{H}')}$.

Der folgende Satz ist entscheidend für die Charakterisierung der Species modulo P.

Satz 2.4.5 *Gegeben seien Untergruppen H_i von G und Elemente $h_i \in H_i$ mit $p \nmid |\langle h_i \rangle|$ und $p \nmid |N_G(H_i, h_iH_i') : H_i|$ für $i = 1, 2$ und $\bar{s}^{D(G)}_{(H_1,h_1H_1')} = \bar{s}^{D(G)}_{(H_2,h_2H_2')}$. Dann existiert ein $g \in G$ mit ${}^g(H_1, h_1H_1') = (H_2, h_2H_2')$.*

Beweis: Wir setzen $(H, hH') := (H_1, h_1H_1')$ und schreiben $H/H' = A \times B$ mit einer p'-Gruppe A und einer p-Gruppe B. A und B sind abelsch, da H/H' abelsch ist. Ferner seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die irreduziblen Charaktere von H/H' mit $B \subseteq \mathrm{Ker}\lambda_i$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Wir setzen

$$\psi := \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(hH')}\lambda_i.$$

Dann gilt das folgende Lemma. Zunächst eine Bemerkung zum Lemma.

Bemerkung 2.4.6 Wir werden im Beweis des folgenden Lemmas an einigen Stellen ein Element gH' in $N_G(H)/H'$, $N_G(H, hH')/H'$ oder H/H' mit $\bar{g}$ abkürzen.

Lemma 2.4.7 *Unter den obenstehenden Voraussetzungen gilt folgendes:*

(i) $\psi^{N_G(H)/H'}(xH') \in \mathbb{Z}$ *für alle* $xH' \in N_G(H)/H'$.

(ii) $\psi^{N_G(H)/H'}(xH') = 0$, *falls xH' in $N_G(H)/H'$ nicht zu einem Element von $\bar{h}B$ konjugiert ist.*

(iii) $\psi^{N_G(H)/H'}(hH') = |(N_G(H, hH')/H') : B|$.

Beweis: Wir setzen $H_0 := H/H'$. Dann ist H_0 und damit H_0/B eine abelsche Gruppe. Wegen Bemerkung 2.3.11 gilt $\mathrm{Irr}(H_0/B) = \widehat{H_0/B} = \{\rho_1, \dots, \rho_k\}$, wobei $\rho_i(\bar{x}B) = \lambda_i(\bar{x})$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und alle $\bar{x} \in H_0$ ist. Es sei $s \in B$. Wegen der zweiten Orthogonalitätsrelation in H_0/B (siehe [**10**, Theorem 2.18, S. 21]) gilt

$$\begin{aligned}\psi(\bar{h}s) &= \sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i(\bar{h})}\lambda_i(\bar{h}s) = \sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i(\bar{h})}\lambda_i(\bar{h})\lambda_i(s) = \sum_{i=1}^{k}|\lambda_i(\bar{h})|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k}\overline{\rho_i(\bar{h}B)}\rho_i(\bar{h}B) = \sum_{i=1}^{k}|\rho_i(\bar{h}B)|^2 = C_{H_0/B}(\bar{h}B) = |H_0/B| = |A|\end{aligned}$$

(λ_i ist linear und $\lambda_i(s) = 1$, weil $s \in B \subseteq \mathrm{Ker}\lambda_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$). Ferner sei $\bar{u} \in H_0$ mit $\bar{u}B$ in H_0/B nicht zu $\bar{h}B$ konjugiert, d.h. $\bar{u}B \neq \bar{h}B$, da H_0/B eine abelsche Gruppe ist. Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation in H_0/B gilt

$$\begin{aligned}\psi(\bar{u}s) &= \sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i(\bar{h})}\lambda_i(\bar{u}s) = \sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i(\bar{h})}\lambda_i(\bar{u})\lambda_i(s) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i(\bar{h})}\lambda_i(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{k}\overline{\rho_i(\bar{h}B)}\rho_i(\bar{u}B) = 0\end{aligned}$$

für alle $s \in B$. Dies bedeutet

$$\psi(xH') = \begin{cases} 0 & \text{falls } xH' \in H_0 \setminus \bar{h}B, \\ |A| & \text{falls } xH' \in \bar{h}B. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Nach der Definition der induzierten Charaktere gilt

$$\psi^{N_G(H)/H'}(gH') = |H_0|^{-1} \sum_{tH' \in N_G(H)/H'} \dot{\psi}(t^{-1}gtH'), \quad gH' \in N_G(H)/H'$$

mit

$$\dot{\psi}(t^{-1}gtH') = \begin{cases} 0 & \text{falls } t^{-1}gtH' \in (N_G(H)/H') \setminus H_0, \\ \psi(t^{-1}gtH') & \text{falls } t^{-1}gtH' \in H_0. \end{cases}$$

Weiter sei $S(\bar{g}) = \{\bar{z} \in N_G(H)/H' |\, \bar{z}\bar{g}\bar{z}^{-1} \in \bar{h}B\}$. Dann gilt

$$\psi^{N_G(H)/H'}(\bar{g}) = |H_0|^{-1}|A||S(\bar{g})| = |B|^{-1}|S(\bar{g})|. \tag{2.4.4}$$

Es seien $\bar{z} \in S(\bar{g})$ und $v \in B$. So ist $\bar{z}\bar{g}\bar{z}^{-1} \in \bar{h}B$. Also ist $v\bar{z}\bar{g}\bar{z}^{-1}v^{-1} \in v\bar{h}Bv^{-1} = v\bar{h}v^{-1}B = \bar{h}B$. Dann ist $(v\bar{z})\bar{g}(v\bar{z})^{-1} \in \bar{h}B$; d.h. $v\bar{z} \in S(\bar{g})$. Also ist $\bar{z} \in S(\bar{g})$. Daraus folgt $B\bar{z} \subseteq S(\bar{g})$. Somit besteht $S(\bar{g})$ aus Rechtsnebenklassen modulo B. Also ist $|B|$ ein Teiler von $|S(\bar{g})|$. Daraus folgt $\psi^{N_G(H)/H'}(gH') \in \mathbb{Z}$ für alle $gH' \in N_G(H)/H'$. Damit ist Teil (i) des Lemmas bewiesen.

Es sei xH' in $N_G(H)/H'$ nicht zu einem Element von $\bar{h}B$ konjugiert. Dann ist $S(xH') = \emptyset$. Und wegen der Formel 2.4.4 gilt $\psi^{N_G(H)/H'}(xH') = 0$. Damit ist Teil (ii) des Lemmas bewiesen.

Wegen der Formel 2.4.4 gilt $\psi^{N_G(H)/H'}(hH') = |B|^{-1}|S(\bar{h})|$. Ferner gilt: $\bar{z} \in S(\bar{h}) \iff \bar{z}^{-1}\bar{h}\bar{z} = \bar{h}b$ für ein $b \in B$. Also ist $1 = \bar{z}^{-1}\bar{h}^{|A|}\bar{z} = \bar{h}^{|A|}b^{|A|} = b^{|A|}$. Aus $(|A|, |B|) = 1$ folgt $b = 1$. Daher ist $\bar{z} \in C_{N_G(H)/H'}(hH')$. Also gilt $S(\bar{h}) = C_{N_G(H)/H'}(hH')$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi^{N_G(H)/H'}(hH') &= |B|^{-1}|S(\bar{h})| \\ &= |B|^{-1}|C_{N_G(H)/H'}(hH')| \\ &= |C_{N_G(H)/H'}(hH') : B| \\ &= |N_G(H, hH')/H' : B|.\end{aligned}$$

Somit ist Teil (iii) bewiesen. Das Lemma ist also vollständig bewiesen. □

Beweisabschluss zum Satz 2.4.5: Nach Lemma 2.4.7(iii) gilt $\psi^{N_G(H)/H'}(hH') \not\equiv 0(\mathrm{mod}P)$. Daher existiert ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit ${\lambda_j}^{N_G(H)/H'}(hH') \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P)$. Wir setzen $\lambda := \lambda_j$. Wegen Bemerkung 2.3.11 lässt sich $\lambda \in \widehat{H_0}$ zu einem $\varphi \in \widehat{H}$ liften. Und wegen der Formel 2.2.2 gilt

$$\mathrm{Res}_{+H}^{\,G}([H,\varphi]_G) = \sum_{g \in [H\backslash G/H]} [H \cap {}^gH, {}^g\varphi|_{H\cap {}^gH}]_H$$

und die Formel 2.4.1 ergibt

$$\begin{aligned} s_{(H,hH')}^{D(G)}([H,\varphi]_G) &= \sum_{g\in[N_G(H)/H]} \varphi(g^{-1}hg) \\ &= \varphi^{N_G(H)}(h) \\ &\not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P). \end{aligned}$$

Daher ist (nach den Voraussetzungen des Satzes) auch $s_{(H_2,h_2H_2')}^{D(G)}([H,\varphi]_G) \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P)$. Daher ist wegen Satz 2.4.1(i) H_2 zu einer Untergruppe von $H = H_1$ konjugiert. Aus Symmetriegründen folgt, dass H_1 und H_2 in G konjugiert sind. Wir können also o.B.d.A $H_1 = H_2 = H$ annehmen. Dann ist (nach den Voraussetzungen des Satzes) $\bar{s}_{(H,h_1H')}^{D(G)} = \bar{s}_{(H,h_2H')}^{D(G)}$. Wegen Bemerkung 2.3.11 lässt sich jeder $\lambda_i \in \widehat{H_0}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ zu einem $\varphi_i \in \widehat{H}$ liften. Wir setzen

$$\Psi := \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(h_1H')}[H,\varphi_i]_G \in \mathbb{Z}[\zeta] \otimes_{\mathbb{Z}} D(G) = \Omega.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} s_{(H,h_1H')}^{\Omega}(\Psi) &= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(h_1H')} s_{(H,h_1H')}^{D(G)}([H,\varphi_i]_G) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(h_1H')} \sum_{g\in[N_G(H)/H]} \varphi_i(g^{-1}h_1g) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(h_1H')} \varphi_i^{N_G(H)}(h_1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(h_1H')} \lambda_i^{N_G(H)/H'}(h_1H') \\ &= \psi^{N_G(H)/H'}(h_1H') \\ &= |N_G(H,h_1H')/H' : B| \quad \text{(wegen Lemma 2.4.7(iii))} \\ &\not\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}P). \end{aligned}$$

Und

$$
\begin{aligned}
s^{\Omega}_{(H,h_2H')}(\Psi) &= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(h_1H')} s^{D(G)}_{(H,h_2H')}([H,\varphi_i]_G) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(h_1H')} \sum_{g\in[N_G(H)/H]} \varphi_i(g^{-1}h_2g) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(h_1H')} \varphi_i^{N_G(H)}(h_2) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i(h_1H')} \lambda_i^{N_G(H)/H'}(h_2H') \\
&= \psi^{N_G(H)/H'}(h_2H').
\end{aligned}
$$

Es sei $\bar{h}_2$ in $N_G(H)/H'$ nicht zu einem Element von $\bar{h}_1B$ konjugiert. Dann ist wegen Lemma 2.4.7(ii) $s^{\Omega}_{(H,h_2H')}(\Psi) = 0$ und $p \nmid |N_G(H,h_1H')/H' : B| = s^{\Omega}_{(H,h_1H')}(\Psi) \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\bar{s}^{D(G)}_{(H,h_1H')} = \bar{s}^{D(G)}_{(H,h_2H')}$. Also ist $\bar{h}_2$ in $N_G(H)/H'$ zu einem Element $\bar{h}_1w$ von $\bar{h}_1B$ konjugiert. Daher stimmen die Ordnungen von $\bar{h}_2$ und $\bar{h}_1w$ überein. Ferner sind $\bar{h}_1$ und $\bar{h}_2$ p'-Elemente von $N_G(H)/H'$, $w \in B$ und B ist eine p-Gruppe. Also ist $w = 1$. Daher sind $\bar{h}_1 = h_1H'$ und $\bar{h}_2 = h_2H'$ in $N_G(H)/H'$ konjugiert. Somit sind (H_1, h_1H_1') und (H_2, h_2H_2') in G konjugiert. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Wir sind nun in der Lage, die Species modulo P zu charakterisieren. Mit den Bezeichnungen der Bemerkung 2.4.4 erhalten wir den wichtigen

Satz 2.4.8 *Für je zwei Paare (H,hH'), $(K,kK') \in \mathcal{D}(G)$ gilt:*

$$
\bar{s}^{D(G)}_{(H,hH')} = \bar{s}^{D(G)}_{(K,kK')} \Longleftrightarrow (\tilde{H}, h_{p'}\tilde{H}') \sim_G (\tilde{K}, k_{p'}\tilde{K}').
$$

Beweis: ($\Longleftarrow$): Sei $(\tilde{H}, h_{p'}\tilde{H}') \sim_G (\tilde{K}, k_{p'}\tilde{K}')$. Dann ist wegen Satz 2.4.1(ii) $s^{D(G)}_{(\tilde{H},h_{p'}\tilde{H}')} = s^{D(G)}_{(\tilde{K},k_{p'}\tilde{K}')}$. Also $\bar{s}^{D(G)}_{(\tilde{H},h_{p'}\tilde{H}')} = \bar{s}^{D(G)}_{(\tilde{K},k_{p'}\tilde{K}')}$. Und wegen der Formel 2.4.2 und der Bemerkung 2.4.4(iii) gilt: $\bar{s}^{D(G)}_{(H,hH')} = \bar{s}^{D(G)}_{(\tilde{H},h_{p'}\tilde{H}')} = \bar{s}^{D(G)}_{(\tilde{K},k_{p'}\tilde{K}')} = \bar{s}^{D(G)}_{(K,kK')}$.

($\Longrightarrow$): Es seien (H,hH'), $(K,kK') \in \mathcal{D}(G)$ mit $\bar{s}^{D(G)}_{(H,hH')} = \bar{s}^{D(G)}_{(K,kK')}$. Wegen Bemerkung 2.4.4 liefern (H,hH') und (K,kK') wie oben die Paare $(\tilde{H}, h_{p'}\tilde{H}')$ und $(\tilde{K}, k_{p'}\tilde{K}')$. Damit gilt $\bar{s}^{D(G)}_{(\tilde{H},h_{p'}\tilde{H}')} = \bar{s}^{D(G)}_{(H,hH')} = \bar{s}^{D(G)}_{(K,kK')} = \bar{s}^{D(G)}_{(\tilde{K},k_{p'}\tilde{K}')}$. Also erfüllen die Paare $(\tilde{H}, h_{p'}\tilde{H}')$ und $(\tilde{K}, k_{p'}\tilde{K}')$ die Voraussetzungen des Satzes 2.4.5. Daher sind sie in G konjugiert. Damit ist der Satz bewiesen. □

Nun sind wir zum Ziel dieses Abschnitts gekommen. Wir werden die Zusammenhangskomponenten bezüglich der Zariski-Topologie des Primspektrums und damit die primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$ untersuchen.

2.4.2 Idempotente von $D_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$

Wir führen die Bezeichnungen des vorigen Unterabschnitts fort. Es seien P ein Primideal von $\mathbb{Z}[\zeta]$. Für $P \neq 0$ wählen wir eine Primzahl p mit $p \in P$. Dann ist $\mathbb{Z}[\zeta]/P$ ein endlicher

Körper der Charakteristik p. Ferner sei $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$. Dann sind die Species $s^{\Omega}_{(H,hH')}$ von $\Omega := \mathbb{Z}[\zeta] \otimes_{\mathbb{Z}} D(G) = D_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$ genau die Fortsetzungen der Species $s^{D(G)}_{(H,hH')}$ von $D(G)$. Da Ω eine geschlossene $\mathbb{Z}[\zeta]$-Algebra ist, gelten die Ergebnisse von [**8**, Kapitel 1] in Ω. Wir setzen

$$\mathfrak{P}(H, h, P) := \{x \in \Omega |\ s^{\Omega}_{(H,hH')}(x) \in P\} \tag{2.4.5}$$

und erhalten die folgende explizite Form des Satzes 2.4.2

Satz 2.4.9 *Es gilt folgendes:*

(i) Jedes Primideal von Ω ist von der Form $\mathfrak{P}(H, h, P)$, wobei H eine Untergruppe von G, h ein Element in H und P ein Primideal von $\mathbb{Z}[\zeta]$ ist.

(ii) Jedes minimale Primideal von Ω ist von der Form $\mathfrak{P}(H, h, 0)$, wobei H eine Untergruppe von G und h ein Element in H ist.

(iii) Es gilt $\mathfrak{P}(H, h, 0) = \mathfrak{P}(K, k, 0)$ genau dann, wenn (H, hH') und (K, kK') in G konjugiert sind.

(iv) Jedes maximale Ideal von Ω ist von der Form $\mathfrak{P}(H, h, P)$, wobei P ein nichttriviales Primideal von $\mathbb{Z}[\zeta]$, H eine Untergruppe von G, h ein p'-Element in H, $p \nmid |N_G(H, hH') : H|$ und p die Charakteristik des Körpers $\mathbb{Z}[\zeta]/P$ ist.

(v) Zwei maximale Ideale $\mathfrak{P}(H, h, P)$, $\mathfrak{P}(K, k, Q)$ der obigen Form sind gleich genau dann, wenn $P = Q$ und (H, hH'), (K, kK') in G konjugiert sind.

(vi) Ein minimales Primideal $\mathfrak{P}(H, h, 0)$ ist genau dann in einem maximalen Ideal $\mathfrak{P}(K, k, P)$ enthalten, wenn $(\tilde{H}, h_{p'}\tilde{H}')$ und $(\tilde{K}, k_{p'}\tilde{K}')$ in G konjugiert sind, wobei p die Charakteristik des Körpers $\mathbb{Z}[\zeta]/P$ ist.

BEWEIS: Zu (i): Folgt aus Satz 2.4.2(i).
Zu (ii): Folgt aus Satz 2.4.2(iii), denn Ω eine geschlossene $\mathbb{Z}[\zeta]$-Algebra ist.
Zu (iii): Folgt aus (i), Satz 2.4.2(ii) für $P = 0$ und Satz 2.4.1(ii).
Zu (iv): Folgt aus Satz 2.4.2(i) und Satz 2.4.8, denn für ein Paar (H, hH') dieser Form gilt $(\tilde{H}, h_{p'}\tilde{H}') = (H, hH')$.
Zu (v): ($\Longleftarrow$) ist trivial. Es sei umgekehrt $\mathfrak{P}(H, h, P) = \mathfrak{P}(K, k, Q)$. Dann enthält Ω die Menge $\mathbb{Z}[\zeta] \otimes 1 \cong \mathbb{Z}[\zeta]$ als Teilring und es ist $\mathfrak{P}(H, h, P) \cap (\mathbb{Z}[\zeta] \otimes 1) = \mathfrak{P}(K, k, Q) \cap (\mathbb{Z}[\zeta] \otimes 1)$. Ferner ist $s^{\Omega}_{(H,hH')}$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}[\zeta]$-Algebren. Also gilt $s^{\Omega}_{(H,hH')}(P \otimes 1) = Ps^{\Omega}_{(H,hH')}(1 \otimes 1) \subseteq P \Rightarrow P \otimes 1 \subseteq (s^{\Omega}_{(H,hH')})^{-1}(P) = \mathfrak{P}(H, h, P)$. Also ist $\mathfrak{P}(H, h, P) \cap (\mathbb{Z}[\zeta] \otimes 1) = P \otimes 1$. Analog gilt auch $\mathfrak{P}(K, k, Q) \cap (\mathbb{Z}[\zeta] \otimes 1) = Q \otimes 1$. Somit gilt $P \otimes 1 = Q \otimes 1$. Daher ist $P = Q$. Und wegen Satz 2.4.5 sind die Paare (H, hH') und (K, kK') in G konjugiert.
Zu (vi): Folgt aus [**8**, Lemma 1.4 (i), (3)$\Longleftrightarrow$(4)] und Satz 2.4.8. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Wir betrachten nun die **Zariski-Topologie** von $\mathrm{Spek}(\Omega)$. Zunächst beschreiben wir eine allgemeinere Situation.
Es seien R ein kommutativer noetherscher Ring und $\mathrm{Spek}(R)$ die Menge der Primideale in R. Für jedes $T \subseteq R$ sei $\mathcal{V}(T) = \{P \in \mathrm{Spek}(R) |\ P \supseteq T\}$. Dann gilt:

$$\mathcal{V}(\{0\}) = \mathrm{Spek}(R), \quad \mathcal{V}(\{1\}) = \emptyset.$$

Für jede Familie $(T_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von R gilt:

$$\mathcal{V}(\bigcup_{i\in I} T_i) = \mathcal{V}(\sum_{i\in I} T_i) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{V}(T_i).$$

Für zwei Ideale J und J' von R gilt auch:

$$\mathcal{V}(J \cap J') = \mathcal{V}(JJ') = \mathcal{V}(J) \cup \mathcal{V}(J').$$

Damit erhalten wir die drei grundlegenden Eigenschaften von abgeschlossenen Mengen in einer Topologie. Nach der Definition einer Topologie durch abgeschlossene Mengen entsteht also eine Toplogie auf Spek(R). Sie heißt die Zariski-Topologie. Dann liefert die Abbildung

$$\Phi : e \longmapsto \{P \in \mathrm{Spek}(R) |\ e \notin P\}$$

eine Bijektion zwischen den Idempotenten von R und den offenen abgeschlossenen Teilmengen von Spek(R) versehen mit der Zariski-Topologie (siehe z.B. [**11**, Theorem 7.3, Seite 406]). Ein Idempotent ist dabei genau dann primitiv, wenn die zugehörige Menge $\Phi(e)$ eine Zusammenhangskomponente bildet.

Dies wenden wir auf Ω an, da Ω wegen Bemerkung 2.1.5 auch ein noetherscher Ring mit Erzeugendensystem $1 \otimes (\mathcal{M}_G/G) := \{1 \otimes [H, \varphi]_G |\ [H, \varphi]_G \in \mathcal{M}_G/G\}$ ist. Es sei P ein Primideal von $\mathbb{Z}[\zeta]$. Zwei Species $s^\Omega_{(H,hH')}$ und $s^\Omega_{(K,kK')}$ von Ω nennen wir *P-äquivalent*, falls $\mathfrak{P}(H, h, P) = \mathfrak{P}(K, k, P)$ gilt. Gegebenenfalls schreiben wir $s^\Omega_{(H,hH')} \sim_P s^\Omega_{(K,kK')}$.

Wir nennen zwei Species $s^\Omega_{(H,hH')}$, $s^\Omega_{(K,kK')}$ von Ω *zusammenhängend* und schreiben $s^\Omega_{(H,hH')} \sim s^\Omega_{(K,kK')}$, wenn es Species

$$s^\Omega_{(H,hH')} = s^\Omega_{(L_0,l_0L'_0)},\ s^\Omega_{(L_1,l_1L'_1)}, \ldots,\ s^\Omega_{(L_{m-1},l_{m-1}L'_{m-1})},\ s^\Omega_{(L_m,l_mL'_m)} = s^\Omega_{(K,kK')}$$

von Ω und Primideale $P_1, \ldots, P_m$ von $\mathbb{Z}[\zeta]$ mit $s^\Omega_{(L_{j-1},l_{j-1}L'_{j-1})} \sim_{P_j} s^\Omega_{(L_j,l_jL'_j)}$ für $j = 1, \ldots, m$ existieren. Damit erhalten wir:

Satz 2.4.10 *Für Species $s^\Omega_{(H,hH')}$ und $s^\Omega_{(K,kK')}$ von Ω und Primideale P und Q von $\mathbb{Z}[\zeta]$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Die Primideale $\mathfrak{P}(H, h, P)$ und $\mathfrak{P}(K, k, Q)$ liegen in derselben Zusammenhangskomponente von Spek(Ω).

(2) $s^\Omega_{(H,hH')}$ und $s^\Omega_{(K,kK')}$ sind zusammenhängend.

(3) Es existieren minimale Primideale $\mathfrak{P}(H_0, h_0, 0), \ldots, \mathfrak{P}(H_m, h_m, 0)$ in Ω mit $\mathfrak{P}(H, h, P) \in \mathcal{V}(\mathfrak{P}(H_0, h_0, 0)), \mathfrak{P}(K, k, Q) \in \mathcal{V}(\mathfrak{P}(H_m, h_m, 0))$ und $\mathcal{V}(\mathfrak{P}(H_{j-1}, h_{j-1}, 0)) \cap \mathcal{V}(\mathfrak{P}(H_j, h_j, 0)) \neq \emptyset$ für $j = 1, \ldots, m$.

Beweis: Folgt aus [**8**, Satz 1.9], da Ω eine geschlossene $\mathbb{Z}[\zeta]$-Algebra ist. □

Es seien P ein Primideal von $\mathbb{Z}[\zeta]$ und p eine Primzahl mit $p \in P$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}(H, h, P) \supseteq \mathfrak{P}(K, k, 0) &\Longleftrightarrow (\tilde{H}, h_{p'}\tilde{H}') \sim_G (\tilde{K}, k_{p'}\tilde{K}') \quad \text{(nach Satz 2.4.9(vi))}\\
&\Longleftrightarrow \mathfrak{P}(H, h, P) = \mathfrak{P}(K, k, P)\\
&\Longleftrightarrow s^\Omega_{(H,hH')} \sim_P s^\Omega_{(K,kK')}\\
&\Longleftrightarrow \mathfrak{P}(H, h, P) \in \mathcal{V}(\mathfrak{P}(K, k, 0))
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{P}(K,k,0)) = \{\mathfrak{P}(K,k,P) |\, P \in \operatorname{Spek}(\mathbb{Z}[\zeta])\}.$$

Es seien nun $\mathfrak{P}(H,h,0)$, $\mathfrak{P}(K,k,0)$ zwei minimale Primideale von Ω und $\mathfrak{P}(L,l,P)$ ein Primideal von Ω. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}(L,l,P) &\in \mathcal{V}(\mathfrak{P}(H,h,0)) \cap \mathcal{V}(\mathfrak{P}(K,k,0)) \\
&\Longleftrightarrow \mathfrak{P}(H,h,0) \subseteq \mathfrak{P}(L,l,P) \;\wedge\; \mathfrak{P}(K,k,0) \subseteq \mathfrak{P}(L,l,P) \\
&\overset{S.2.4.9(vi)}{\Longleftrightarrow} s^{\Omega}_{(H,hH')} \equiv s^{\Omega}_{(L,lL')} \pmod P \;\wedge\; s^{\Omega}_{(K,kK')} \equiv s^{\Omega}_{(L,lL')} \pmod P \\
&\Longrightarrow s^{\Omega}_{(H,hH')} \equiv s^{\Omega}_{(K,kK')} \pmod P
\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt $s^{\Omega}_{(H,hH')} \equiv s^{\Omega}_{(K,kK')} \pmod P \Longrightarrow \mathfrak{P}(H,h,P) = \mathfrak{P}(K,k,P) \Longrightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{P}(H,h,0)) \cap \mathcal{V}(\mathfrak{P}(K,k,0)) \neq \emptyset$. Und wegen Satz 2.4.8 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathfrak{P}(H,h,0)) \cap \mathcal{V}(\mathfrak{P}(K,k,0)) \neq \emptyset \Longleftrightarrow (\tilde{H}, h_{p'}\tilde{H}') \sim_G (\tilde{K}, k_{p'}\tilde{K}') \\
\text{für eine Primzahl } p \in P.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Es seien π die Menge der verschiedenen Primteiler von $|G|$ und $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$. Ferner seien $\pi' := \{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \pi$ die Menge der Primteiler der Ordnung von h und $P_1, \ldots, P_k$ Primideale in $\mathbb{Z}[\zeta]$ mit $q_i \in P_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. Wir setzen $h'_1 := h_{q'_1}$, $h'_2 := (h'_1)_{q'_2}, \ldots,$ $h'_k := (h'_{k-1})_{q'_k}$. Dann ist $h'_k = 1$ und

$$\begin{aligned}
s^{\Omega}_{(H,hH')} &\equiv s^{\Omega}_{(H,h'_1H')} \equiv s^{\Omega}_{(\tilde{H},h'_1\tilde{H}')} \pmod{P_1}, \\
s^{\Omega}_{(H,h'_1H')} &\equiv s^{\Omega}_{(H,h'_2H')} \equiv s^{\Omega}_{(\tilde{H},h'_2\tilde{H}')} \pmod{P_2} \\
&\vdots \\
s^{\Omega}_{(H,h'_{k-1}H')} &\equiv s^{\Omega}_{(H,h'_kH')} = s^{\Omega}_{(H,H')} \equiv s^{\Omega}_{(\tilde{H},h'_k\tilde{H}')} = s^{\Omega}_{(\tilde{H},\tilde{H}')} \pmod{P_k}
\end{aligned}$$

Also $\mathfrak{P}(H,1,0) \subseteq \mathfrak{P}(H,1,P_k)$ und $\mathfrak{P}(\tilde{H},1,0) \subseteq \mathfrak{P}(H,1,P_k)$. Und wegen der Formel 2.4.6, Satz 2.4.8 und Satz 2.4.10 liegen $\mathfrak{P}(H,1,0)$, $\mathfrak{P}(\tilde{H},1,0)$, $\mathfrak{P}(H,h,0)$ und $\mathfrak{P}(H,h,P_k)$ in derselben Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Spek}(\Omega)$.

Unter welchen Bedingungen zwei beliebige Primideale $\mathfrak{P}(H,h,P)$ und $\mathfrak{P}(K,k,Q)$ in derselben Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Spek}(\Omega)$ liegen, hängt offenbar nur noch von den Konjugationsklassen der Untergruppen H und K ab. Mit $a(H)$ bezeichnen wir den minimalen Normalteiler von H, so dass die Faktorgruppe $H/a(H)$ auflösbar ist. Dann gibt es Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ und eine Kette von Untergruppen

$$a(H) =: H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_m := H$$

mit $H_j \leqslant N_G(H_{j-1}) = N_G(H_{j-1}, 1H'_{j-1})$ und H_j/H_{j-1} p_j-Untergruppen von $N_G(H_{j-1})/H_{j-1}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Wir wählen nun Primideale $P_1, \ldots, P_m$ in $\mathbb{Z}[\zeta]$ mit $p_j \in P_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Wegen Lemma 2.4.3 gilt

$$s^{\Omega}_{(H_j,H'_j)} \equiv s^{\Omega}_{(H_{j-1},H'_{j-1})} \pmod{P_j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Aus der Formel 2.4.6 folgt :

$$\mathfrak{P}(H,h,P) \in \mathcal{V}(\mathfrak{P}(H,h,0)); \quad \mathcal{V}(\mathfrak{P}(H_j,1,0)) \cap \mathcal{V}(\mathfrak{P}(H_{j-1},1,0)) \neq \emptyset$$
$$\text{für alle } j = 1,\ldots,m.$$

Wegen Satz 2.4.10 liegen $\mathfrak{P}(H,1,0)$ und $\mathfrak{P}(a(H),1,0)$ in derselben Zusammenhangskomponente von Spek(Ω). Wegen Satz 2.4.9(iii) ist $\mathfrak{P}(a(H),1,0) = \mathfrak{P}(a(K),1,0)$, wenn $a(H)$ und $a(K)$ in G konjugiert sind. Daher ist die Anzahl der Idempotente von Ω höchstens die Anzahl der Konjugationsklassen von perfekten Untergruppen von G. Dies zeigt insbesondere, da $B(G)$ ein Teilring von $D(G)$ ist und wegen [**13**, Chapter 15, Theorem 4.5(i)], dass es außer den Idempotenten des Burnside-Ringes in $D(G)$ keine weiteren mehr gibt. Also gilt:

Satz 2.4.11 *Zwei Primideale $\mathfrak{P}(H,h,P)$ und $\mathfrak{P}(K,k,Q)$ von Ω liegen in derselben Zusammenhangskomponente von* Spek(Ω) *genau dann, wenn $a(H)$ und $a(K)$ in G konjugiert sind. Es gibt also eine bijektive Zuordnung zwischen den primitiven Idempotenten von Ω und den Konjugationsklassen von perfekten Untergruppen von G. Insbesonderes ist G genau dann auflösbar, wenn Ω nur die trivialen Idempotente besitzt.*

Bemerkung 2.4.12 Unter einer **perfekten** Gruppe soll eine Gruppe G mit der Eigenschaft $G = G'$ verstanden werden. Der obige Satz folgt unmittelbar aus [**13**, Chapter 15, Theorem 4.5].

Literaturverzeichnis

[**1**] J. L. Alperin and R. B. Bell, *Groups and Representations*, Springer-Verlag, 1995.

[**2**] Ya. G. Berkovich and E. M. Zhmud' *Characters of Finite Groups*, Part 1, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island vol.172, 1998.

[**3**] Robert Boltje, *Canonical and explicit Brauer induction in the character ring of a finite group and a generalization for Mackey functors*, PhD Thesis, Universität Augsburg, 1989.

[**4**] Robert Boltje, *A general theory of canonical induction formulae*, J. of Algebra **206** (1998), 293-343.

[**5**] Robert Boltje, *Representations rings of finite groups, their species, and idempotent formulae.* (Preprint), 2001.

[**6**] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of representation theory*, Vol.1 J. Wiley & Sons, New York 1981.

[**7**] Klaus Doerk and Trevor Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Walter de Gruyter, 1992.

[**8**] Markus Deiml, *Zur Darstellungstheorie von Darstellungsringen*, PhD Thesis, Universität Jena, 1997.

[**9**] Bertram Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, 1967.

[**10**] I. Martin Isaacs, *Character theory of finite groups*, Dover Publications, 1976.

[**11**] Nathan Jacobson, *Basic algebra*, vol. II, Freeman, 1980.

[**12**] Burkhard Külshammer, *Darstellungstheorie*, Vorlesungsskript, 1993/94.

[**13**] Gregory Karpilovsky, *Group representations 4*, Math. Studies, Vol.182, North Holland, 1995.

[**14**] J. Thévenaz, *Isomorphic Burnside rings*, Comm. Algebra **16**(9)(1988), 1945-1947.

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe.

Jena, 19. Dezember 2003 Bosco Fotsing